## УДК 536.241

# КОНТАКТНОЕ ТЕРМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ ВАКУУМА

#### Д. Г. Викулов, А. Г. Викулов

Московский авиационный институт (государственный технический университет), 125993, Россия, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, viarticle@yandex.ru

## 1. Введение

Одними из важнейших требований к современной технике являются оптимизация массы и снижение непроизводительных тепловых потерь. Особое значение выбор наилучших массово-габаритных характеристик и эффективное решение задач термического регулирования имеют при проектировании транспортных, энергетических и космических систем. Термическое сопротивление  $R_{th,c}$ , возникающее в соединениях элементов конструкций и определяемое отношением приведенного перепада температуры  $\Delta T$  на средних контактных плоскостях к плотности теплового потока q [1]:

$$R_{th,c} = \frac{1}{\alpha_{th,c}} = \frac{\Delta T}{q},\tag{1}$$

где  $\alpha_{ih,c}$  – контактная термическая проводимость, Вт/м<sup>2</sup>·К, – может быть как негативным, так и позитивным фактором в зависимости от характера рассматриваемой проблемы, приводя, в одних случаях, к потерям температурного напора, а в других, заменяя сопротивление достаточно толстого слоя теплоизолирующего материала (рис. 1). Поэтому разработка методов вычисления контактного сопротивления в различных условиях является крайне важной задачей.

В условиях вакуума, характерных, в том числе, и для космических энергетических установок, основной тепловой поток в контактах твердых тел переносится теплопроводностью и излучением, а при температуре теплоотдающего материала менее 700...1000 К – преимущественно теплопроводностью через пятна фактического контакта, суммарная площадь которых значительно меньше номинальной [1], [2]. При стягивании к этим пятнам линий теплового потока в прилегающих к средней контактной плоскости зонах возмущения образуется термическое сопротивление стягивания (рис. 2, 3), практически определяющее полное контактное сопротивление при отсутствии среды в зазорах [3]. Существующие методы расчета термического сопротивления стягивания [4-7] являются полуэмпирическими, используют фиктивные величины или принимают граничное условие 4 рода, допускающее непрерывность температурного поля в близких к идеальным тесных (малодискретных) контактах на фактической площади, и, как следствие, равенство нулю термического сопротивления контактных пятен.

Между тем, экспериментальные исследования [8] контактного теплообмена в металлах показали, что процесс приближения фактической площади контакта к номинальной, происходящий при увеличении действующей на соединение твердых тел сжимающей силы, сопровождается асимптотическим стремлением к нулю лишь производной по давлению контактного термического сопротивления. Само сопротивление стремится не к нулю, а к малому конечному значению, представляющему собой термическое сопротивление фактического контакта. Отсюда следует, что граница раздела твердых тел в зоне фактического контакта имеет конечную термическую проводимость, т.е. термическое сопротивление тесного контакта не равно нулю.

В известной литературе [8] существование собственного термического сопротивления тесного контакта связывается с рассеянием электронов и фононов на границе раздела непрерывных сред. Отсутствие других интерпретаций подобных результатов объясняется сложностью применения в точках разрыва температурного поля и теплофизических свойств модели непрерывной среды, а также недостаточной изученностью физических механизмов передачи тепловой энергии в местах непосредственного контакта поверхностей твердых тел.

В связи с этим, целью настоящей работы явилось создание физически обоснованной методики расчета термического сопротивления контактов высокой и низкой дискретности, функционирующих в вакууме, и экспериментальная проверка теоретических результатов.



Рис. 1. Распределение температуры в контакте твердых тел (в материале 1 теплопроводность увеличивается с ростом температуры, в материале 2 – уменьшается)



Рис. 3. Структура сопротивления стягивания ( $R_{cn,j}$  – сопротивления макростягивания к контурным площадкам;  $r_{j,k}$  – сопротивления микростягивания к пятнам фактического контакта)



Рис. 2. Стягивание линий теплового потока к зонам фактического контакта



Рис. 4. Система двух твердых тел в идеальном контакте (в материале «а» теплопроводность увеличивается с ростом температуры, в материале «b» – уменьшается; пунктиром показано температурное поле при постоянной теплопроводности материалов)

#### 2. Термическое сопротивление тесного контакта

Согласно принятому в существующей литературе [1] граничному условию 4 рода, допускающему непрерывность температурного поля в идеальном соединении твердых тел «а» и «b», температура контактных поверхностей одинакова и равна (рис. 4)

$$_{ab}T_{w} = \frac{\frac{a\lambda^{j}}{a\delta^{j}}aT_{w,1} + \frac{b\lambda^{j}}{b\delta^{j}}bT_{w,1}}{\frac{a\lambda^{j}}{a\delta^{j}} + \frac{b\lambda^{j}}{b\delta^{j}}}.$$
(2)

где  $_{a}T_{w,1}$ ,  $_{b}T_{w,1}$ - температуры на свободных поверхностях взаимодействующих тел;  $_{a}\lambda^{j}$ ,  $_{b}\lambda^{j}$ - теплопроводности материалов «а» и «b» в пространственном направлении  $x^{j}$ ;  $_{a}\delta^{j}$ ,  $_{b}\delta^{j}$ - тол-

щины материалов «а» и «b» в пространственном направлении  $x^{j}$ . При этом, термическое сопротивление идеального контакта равно нулю:

$$R_{th,i} = \frac{\Delta_{ab} T_w}{_{ab} q_w} = 0.$$
(3)

Поскольку любая физическая среда дискретна, термическое сопротивление идеального контакта представляет собой сопротивление при передаче тепла от одного молекулярного слоя другому. Температуры частиц данных слоев равны только в термодинамическом равновесии. При наличии теплового потока энергия передается от более возбужденных частиц менее возбужденным. Если бы энергия частиц не была связана с температурой, то ее пространственное распространение происходило бы в отсутствие температурного градиента. А так как по закону Фурье тепловой поток пропорционален градиенту температуры, частицы, находящиеся на разных энергетических уровнях, имеют разные температуры. Отсюда следует, что термическое сопротивление при тепловом взаимодействии двух молекулярных слоев или термическое сопротивление идеального контакта имеет конечное значение [9].

По закону Фурье, плотность теплового потока равна произведению теплопроводности  $\lambda$  на градиент температуры:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$
 или  $|q| = \lambda \frac{dT}{dx}$ . (4)

С учетом дискретности вещества температура изменяется на величину  $\delta T$  в каждом молекулярном слое. Толщина слоя определится как расстояние между центрами распределения вероятностей частиц  $\delta x$  (центрами тепловых колебаний). Тогда закон Фурье запишется в виде

$$\left|q\right| = \lambda \frac{\delta T}{\delta x}.$$
(5)

Расстояние между центрами тепловых колебаний частиц можно найти как величину, обратную линейной концентрации частиц данного вещества, которая равна корню кубическому из объемной концентрации

$$C_V = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V} \frac{m}{M} = \frac{N_A}{M} \rho, \qquad (6)$$

где  $N_A$  – число Авогадро, M – молярная масса вещества,  $\rho$  – плотность вещества. Тогда для линейной концентрации имеем следующее выражение:

$$C_l = \left(\frac{N_A}{M}\rho\right)^{\frac{1}{3}}.$$
(7)

Следовательно, среднее расстояние между молекулярными слоями данного вещества будет равно

$$\delta x = \frac{1}{C_l} = \left(\frac{N_A}{M}\rho\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{M}{N_A}\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}.$$
(8)

Подставляя выражение для  $\delta x$  в закон Фурье, найдем  $\delta T$ :

$$\delta T = \frac{|q|}{\lambda} \delta x = \frac{|q|}{\lambda} \left( \frac{M}{N_A} \frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}.$$
(9)

Рассмотрение идеального контакта как системы двух молекулярных слоев «а» и «b», перепад температуры в каждом из которых равен соответственно  $\delta_a T$  и  $\delta_b T$ , приводит к тому, что разность температур этих слоев определится следующим образом:

$$\delta_{ab}T = \frac{1}{2}\delta_a T + \frac{1}{2}\delta_b T = \frac{1}{2}\left(\delta_a T + \delta_b T\right). \tag{10}$$

Тогда термическое сопротивление идеального контакта найдется как отношение контактного перепада температур к плотности теплового потока:

$$_{ab}R_{th,i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_a T + \delta_b T}{q} \right) = \frac{1}{2N_A^{\frac{1}{3}}} \left[ \frac{1}{a\lambda} \left( \frac{aM}{a\rho} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{b\lambda} \left( \frac{bM}{b\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \right], \tag{11}$$

где значения теплопроводности и плотности берутся по средней контактной температуре  $_{ab}T_w$ . С учетом термического сопротивления  $R_{th,i}$  плотность теплового потока через идеальный контакт будет равна

$$_{ab}q_{w} = \frac{_{a}T_{w,1} - _{b}T_{w,1}}{\frac{_{a}\delta}{_{a}\lambda} + _{ab}R_{th,i} + \frac{_{b}\delta}{_{b}\lambda}}.$$
(12)

Для однородного идеального контакта, т.е. контакта твердых тел, представляющих собой один и тот же материал, термическое сопротивление представляет собой сопротивление при передаче тепла от одного молекулярного слоя к другому:

$$R_{th,i} = \frac{2\delta T}{2q} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{M}{\rho N_A}\right)^{\overline{3}}.$$
(13)

Термическое сопротивление идеального контакта очень мало. Например, для контактной пары Си-Ті расчет показывает следующие результаты:

1. 
$$_{Cu}T_{w,1} = 600$$
 K,  $_{Ti}T_{w,1} = 400$  К – положительный тепловой поток  
 $_{Cu,Ti}T_w = 591,4$  K,  
 $_{Cu,Ti}R_{th,i} = 0,8265 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2 \cdot \text{K/BT},$   
 $_{Cu,Ti}q_w = 3,136 \cdot 10^6 \text{ BT/m}^2;$   
2.  $_{Cu}T_{w,1} = 400$  K,  $_{Ti}T_{w,1} = 600$  К – отрицательный (обратный) тепловой поток  
 $_{Cu,Ti}T_w = 408,2$  K,  
 $_{Cu,Ti}R_{th,i} = 0,8225 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2 \cdot \text{K/BT},$   
 $_{Cu,Ti}q_w = -3,151 \cdot 10^6 \text{ BT/m}^2.$ 

Таким образом, влияние термического сопротивления идеального контакта на плотность теплового потока незначительно. Однако, при решении сверхточных задач в области микроскопических систем и малых тепловых потоков приведенная методика позволяет получить реальные значения, не ограничиваясь классическим приближением, согласно которому термическое сопротивление идеального контакта отсутствует.

Идеальные соединения практически недостижимы, однако можно получить так называемые тесные контакты, фактическая площадь которых близка к номинальной. Это означает, что практически по всей площади тесного контакта между частицами взаимодействующих тел достигаются расстояния, сравнимые с размерами атомов. Тесные контакты широко используются в виде pn-переходов и диодов Шоттки. Поскольку они близки к идеальным, разрыв температурного поля в них очень мал, и для их теплового расчета можно использовать выражение (11).

Важным моментом является то, что сопротивление тесного контакта не зависит от контактной площади, а определяется исключительно теплофизическими и термодинамическими свойствами материалов [9]. От площади зависит другая составляющая контактного сопротивления – сопротивление стягивания, которое возникает в материале при стягивании линий теплового потока к местам фактического контакта и имеет довольно значительную величину. Сопротивление стягивания проявляется только в реальных контактах.

# 3. Термическое сопротивление реального контакта в вакууме

Термическое сопротивление соединений высокой дискретности, работающих в условиях вакуума, определяется суммой сопротивлений стягивания и тесного контакта на фактической площади (рис. 5):

$$_{ab}R_{th,c} = {}_{a}R_{th,cn} + {}_{ab}R_{th,r} + {}_{b}R_{th,cn} = {}_{ab}R_{th,r} + \left({}_{a}R_{th,cn} + {}_{b}R_{th,cn}\right) = {}_{ab}R_{th,r} + {}_{ab}R_{th,cn},$$
 (14)  
где  ${}_{ab}R_{th,r} -$  термическое сопротивление тесных контак-



тов на фактической площади;  $_{a} R_{th,cn}$ ,  $_{b} R_{th,cn}$  – сопротивления стягивания в материалах «а» и «b»;  $_{ab} R_{th,cn}$  – полное термическое сопротивление стягивания в материалах «а» и «b».

Рис. 5. Термическое сопротивление в зоне возмущения

Поскольку термическое сопротивление тесного контакта (~  $10^{-11}$  м<sup>2</sup>·K/Вт) на несколько порядков меньше сопротивления стягивания (~  $10^{-4}$  м<sup>2</sup>·K/Вт), именно эффект стягивания определяет контактную термическую

проводимость при отсутствии среды в зазорах. Термическое сопротивление стягивания может быть представлено произведением отношения толщины возмущенной зоны  $\delta_{cn}$  к теплопроводности  $\lambda$  и функции  $\Phi$ , зависящей от соотношения фактической и номинальной площадей:

$$R_{th,cn} = \frac{\delta_{cn}}{\lambda} \Phi = \frac{\delta x N_{cn}}{\lambda} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{A_r}{A_n}\right) = \frac{1}{N_A^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{M}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} N_{cn} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{A_r}{A_n}\right),$$
(15)

1

где  $N_{cn}$  – количество молекулярных слоев в возмущенной зоне, которое изменяется в зависимости от материала. Тогда

$${}_{ab}R_{th,c} = {}_{ab}R_{th,r} + \frac{1}{N_A^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{a\lambda} \left(\frac{aM}{a\rho}\right)^{\frac{1}{3}} {}_a N_{cn} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{A_r}{A_n}\right) + \frac{1}{N_A^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{b\lambda} \left(\frac{bM}{b\rho}\right)^{\frac{1}{3}} {}_b N_{cn} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{A_r}{A_n}\right) = {}_{ab}R_{th,r} + {}_a R_{th,cn} + {}_b R_{th,cn} = {}_{ab}R_{th,r} + {}_{ab}R_{th,cn},$$

$$(16)$$

Эффект стягивания происходит в зонах возмущения, средние температуры которых близки к средней температуре контакта  $_{ab}T_w$ , поэтому теплопроводности и плотности материалов в первом приближении берутся именно по этой температуре и имеют смысл теплофизических свойств зон возмущения. При перестановке температур на внешних границах  $_{ab}T_w$  меняет свое значение, и, следовательно, изменяются теплопроводности зон возмущения, поэтому по (16) изменяется и термическое сопротивление стягивания (рис. 6). Иными словами, наблюдается эффект асимметрии теплового потока или термическое выпрямление. Степень выпрямления зависит от взаимного характера и интенсивности изменения теплопроводностей соприкасающихся материалов (например, для контактной пары Cu-Ti выпрямление теплового потока не превышает 5% при одних и тех же значениях  $A_r/A_n$ ). В соединениях с высокой дискретностью существенно проявляется и зависимость термомеханических свойств от температуры: из-за различия коэффициентов линейного расширения материалов фактическая контактная площадь будет изменяться при инверсии теплового потока, что отразится на соотношении его величин в прямом и обратном направлении.



Рис. 6. Термическое сопротивление контактной пары Cu-Ti при инверсии теплового потока (средняя контактная температура равна: при теплопередаче со стороны Cu 683,1 K; при теплопередаче со стороны Ti 316,6 K)

Поскольку давление Pопределяется отношением нормально действующей силы Nк площадиA :

$$P = \frac{N}{A}, - \tag{17}$$

при одном и том же значении N отношение контактных площадей равно обратному отношению соответствующих давлений, и их использование в (15), (16) в качестве аргумента функции стягивания  $\Phi$  равноправно:

$$\frac{P_n}{P_r} = \frac{A_r}{A_n} \,. \tag{18}$$

Фактическое контактное давление определяют в зависимости от вида контакта [10]:

при упругом контакте

$$P_r = 2E \frac{R_a}{S_m t_m};\tag{19}$$

- при пластическом контакте

$$P_r = 0.8H_T, \tag{20}$$

где  $R_a$  – среднее арифметическое отклонение профиля, м;  $S_m$  – средний шаг неровностей профиля, м;  $t_m$  – относительная опорная длина профиля на уровне средней линии, м; E – модуль упругости, Па. Зная поверхностную микротвердость  $H_0$  материала при комнатной температуре, микротвердость  $H_T$  при температуре контакта T можно рассчитать по следующей формуле:

$$H_T = H_0 \frac{1 - \Theta_0^{\frac{2}{3}}}{1 - \Theta_0^{\frac{2}{3}}},$$
(21)

где безразмерные температуры  $\Theta$ ,  $\Theta_0$  определяются относительно температуры плавления  $T_{mt}$ :

$$\Theta = \frac{T}{T_{mt}}, \ \Theta_0 = \frac{T_0}{T_{mt}}.$$
(22)

Критерием вида контакта является величина

$$\Pi = \frac{ER_a}{H_T S_m}.$$
(23)

Если  $\Pi > \frac{1}{4}$ , то контакт считается пластическим, если  $\Pi \le \frac{1}{4}$  – упругим.

В случае теплового взаимодействия разнородных материалов они находятся в контакте при одной и той же температуре  $\overline{T}_{n,r}$ . В такой весьма распространенной ситуации расчет контактного давления следует проводить для каждого материала независимо. Фактическая контактная площадь определяется по принципу наименьшего давления: фактическим контактным давлением принимается меньшее из рассчитанных. Это обусловлено тем, что менее термостойкий материал деформируется, вызывая увеличение площади контактных пятен. Может оказаться и так, что один из материалов сохранит упругость при данной температуре в контакте, а другой станет пластичным. В данном случае принцип наименьшего давления сохраняется: фактическим контактным давлением принимается давление площадь.

Поскольку функция  $\Phi$  определена только по предельным значениям, необходима ее экспериментальная проверка в нескольких промежуточных точках. Как видно из рис. 7, выражение (16) обеспечивает хорошее количественное совпадение с результатами эксперимента. Некоторое расхождение между теоретическими и опытными данными обусловлено использованием приближенного значения  $N_{cn} \approx 0.5 \cdot 10^7$ , численной аппроксимации теплопроводностей и плотностей материалов контактных пар, а также большим разбросом в справочных значениях микротвердости.

В (15), (16) толщина возмущенной зоны предполагается постоянной. Существует и другой подход, в котором функция стягивания не используется, а  $R_{th,cn}$  определяется как величина, прямо пропорциональная  $\delta_{cn}$  [11]. Однако, в этом случае термическое сопротивление стягивания должно иметь экстремум, так как толщина зоны возмущения не может увеличиваться до бесконечности. В результате, в области малых контактных давлений уменьшение фактической контактной площади должно сопровождаться уменьшением сопротивления стягивания, а ее нулевому значению должно соответствовать нулевое значение  $R_{th,cn}$ . В обеих методиках абсолютные сопротивления стягивания  $R_{th,cn,a} = R_{th,cn} / A_r$  стремятся к бесконечности при уменьшении фактической контактной площади в области малых давлений и достаточно хорошо согласуются с экспериментом для средних и высоких давлений. Между тем, вопрос о существовании экстремума возмущенной зоны является принципиальным и окончательно не решенным на сегодняшний день.



Рис. 7. Экспериментальные и расчетные значения контактного термического сопротивления: а – для контактной пары Cu-Al при средней контактной температуре 333 К (пластический контакт); б – для контактной пары Fe-Al при средней контактной температуре 348 К (пластический контакт)

# 4. Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

1. Разработка методов расчета термического сопротивления контактов твердых тел в условиях вакуума является актуальной задачей, имеющей непосредственное отношение к теплонапряженным установкам космического назначения и большое значение для соединений элементов конструкций, функционирующих в средах с малой теплопроводностью, например, в среде воздуха при нормальном давлении.

2. В условиях вакуума теплопроводность через пятна фактического контакта является вместе с излучением основным – а при температурах менее 700...1000 К – преобладающим механизмом контактной термической проводимости. Существенное различие номинальной и фактической площадей соединения приводит к тому, что при отсутствии теплопроводящей среды в зазорах контактное термическое сопротивление практически равно сопротивлению стягивания. Поскольку известные расчетные соотношения сопротивления стягивания используют фиктивную теплопроводность или граничное условие 4 рода, противоречащее экспериментальным данным, выявлена необходимость углубленного изучения теплопроводности в соединениях твердых тел.

3. Термическое сопротивление тесного контакта имеет конечную величину и определяется по выражению (11).

4. Термическое сопротивление тесного контакта не зависит от площади, а определяется исключительно теплофизическими и термодинамическими свойствами материалов. От площади зависит сопротивление стягивания, которое возникает в материале при стягивании линий теплового потока к местам фактического контакта и имеет значительную величину. Сопротивление стягивания проявляется только в реальных контактах и стремится к нулю по мере приближения фактической площади к номинальной.

5. Термическое сопротивление реальных соединений твердых тел в вакууме представляет собой величину (16), равную сумме термических сопротивлений стягивания в материалах контактной пары и сопротивления фактического контакта.

## Список литературы

- [1] Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике: Учебник для авиационных специальностей вузов / В.С. Авдуевский, Б.М. Галицейский, Г.А. Глебов и др.; Под общ. ред. В.С. Авдуевского, В.К. Кошкина. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1992, с. 319-327.
- [2] Викулов Д.Г., Викулов А.Г. Применение свойств тесных контактов для теплового регулирования в космических энергетических установках // Труды XVI Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках». 21-25 мая 2007 г., Санкт-Петербург. Т. 2. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007, с. 237-238.
- [3] Degiovanni A., Remy B., Andre S. A simple model for the thermal "N-constriction" of a solidsolid contact, J. Heat Tranfer, 2002, pp. 15-20.
- [4] Eid J.C., Antonetti V.W. Small scale thermal contact resistance of aluminum against silicon, Proceedings of the 8th international heat transfer conference, San Francisco, CA, pp. 659-664.
- [5] Меснянкин С.Ю. Методы расчета и регулирования контактных термических сопротивлений // Тепловое проектирование систем. Сборник научных трудов. – М: Изд-во МАИ, 1990, с. 78-86.
- [6] Cames-Pintaux A.-M. Etude des contacts thermiques en régime transitoire. Comparaison entre un schema de résistance pure et un modèle à 3 murs termiquement equivalent au contact réel. Revue général de thermique, tome XXI, № 252, décembre 1982, pp. 963-972.
- [7] Padet J.-P., Cames-Pintaux A.-M. Etude d'un modèle unidimensionnel pour les contact thermique en régime instationnaire. Revue de physique appliqué, № 8, août 1985, pp. 599-607.
- [8] Коршунов И.Г., Черанев В.И., Тарасов Б.Н. Влияние границы раздела сред на теплофизические свойства биметаллических структур // Химия и компьютерное моделирование. Бутлеровские сообщения. 2002. Приложение к спецвыпуску № 10, с. 275-277.

- [9] Викулов А.Г. Теплопроводность в идеальном контакте твердых тел // Труды Четвертой Российской национальной конференции по теплообмену: В 8 томах. Т. 7. Радиационный и сложный теплообмен. Теплопроводность и теплоизоляция – М.: Издательский дом МЭИ, 2006, с. 179-182.
- [10]Измайлов В.В. К разработке инженерной методики расчета электрического сопротивления контакта шероховатых поверхностей // Механика и физика контактного взаимодействия. Сборник научных трудов. Калинин: КГУ, 1985, с. 82-90.
- [11]Новиков В.С. Фононный перенос тепла через реальный контакт твердых тел // В кн. Теплофизика и теплотехника. Вып. 18. Киев: Изд-во АН УССР, с. 126-131.