VI Minsk International Heat and Mass Transfer Forum
MIF 2008, Minsk, May 19-23, 2008

УДК 532.526

РОЛЬ КАЛИБРОВОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

А.А. Соловьев,[1] Р.И. Нигматулин [2]

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, geosolmgu@ mtu-net.ru*
[2] *Научный центр волновой механики и технологии РАН, Москва, office@nwmtc.ac.ru*

Развивается концепция калибровочной инвариантности тепловых и гидродинамических взаимодействий. Рассматриваются физические аспекты влияния калибровочных полей на характер изменения математических моделей процессов переноса тепла. Показано, что калибровочные условия в теории процессов переноса приводят к волновому уравнению теплопроводности.

Ключевые слова

Уравнения теплопроводности, калибровочные преобразования, математические модели теплопроводности, тепловые волны.

Условные обозначения

$\vec{V}$ - вектор скорости потока, м/с; р- давление, Па; ρ -плотность, к*г*/м^3; T – температура, К; $\vec{\omega}$-вектор завихренности, с$^{-1}$; $\vec{Q}$ -вектор теплового потока, Вт/м^2; η – динамический коэффициент вязкости н·с/м^2; ν - кинематический коэффициент вязкости, м^2/с; С – удельная теплоемкость, Дж/кг·град; λ -коэффициент теплопроводности, Вт/м^2·град; а- скорость распространения возмущений, м/с.

Введение

Для описания теплофизических процессов в текучих средах используется система дифференциальных уравнений, методы решения которой, строятся на основе формулировки разнообразных граничных и начальных условий и данных о феноменологических коэффициентах веществ. Анализ проблем, с которыми сталкивается теория процессов переноса тепла и импульса, приводит к мысли о том, что до сих пор не рассматривалась возможность представления тепловых и гидродинамических полей как разновидности единого взаимодействия. В классической теории процессов переноса взаимная связь, входящих в систему дифференциальных уравнений, описывающих пространственно-временные изменения тепловых и гидродинамических величин, фактически определяется только статически с помощью уравнения состояния сплошной среды. При этом тепловые и гидродинамические поля остаются динамически независимыми, что находит свое выражение в раздельном существовании соответствующих уравнений параболического типа. И как следствие этого, известные трудности в описании процессов теплопроводности, учитывающих конечную скорость распространения тепла и импульса [1].

Одна из фундаментальных идей современной физики заключается в том, что все взаимодействия отражают существующий в природе некий набор абстрактных симметрий. Среди симметрий, на которых основано описание фундаментальных взаимодействий, особое место занимают так называемые калибровочные симметрии [2]. Существует целый ряд калибровочных симметрий и полей для компенсации калибровочных преобразований. Концепция калибровочной симметрии положена в основу уравнений электродинамики Максвелла, благодаря чему динамически объединяются электрическое и магнитное взаимодействие [3]. Удалось установить точную форму соответствующей калибровочной симметрии также для представления полей взаимодействующих элементарных частиц. Следующий шаг на пути обобщения взаимодействий заключается в том, чтобы определить условие калибровочной инвариантности тепловых и гидродинамических явлений. Фактически это означает, что понятие дальнодействия существующее в современном представлении системы уравнений, описывающей теплофизические процессы в сплошной среде, следует заменить близкодействием, которое является свойством калибровочных полей. В настоящей работе, преследуется цель рассмотреть физические предпосылки, которые могли бы быть положены в основу описания процессов переноса как проявлений калибровочного полей.

1.Калибровочные преобразования уравнений переноса

Для проверки калибровочной инвариантности уравнений переноса тепла и импульса и вещества, т.е. инвариантности относительно калибровочных преобразований, преобразуем систему дифференциальных уравнений, включающую в себя:

1.Уравнения движения

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V}+\frac{\eta}{3\rho}\nabla\mathrm{div}\vec{V}\,, \qquad (1)$$

где $\vec{V}$ - скорость, p - давление, η - динамический коэффициент вязкости, ρ - плотность жидкости.

2.Уравнения теплопроводности

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t}+C\rho(\vec{V}\nabla)T=\mathrm{div}(\lambda\nabla T)\,, \qquad (2)$$

где T - температура, λ - коэффициент теплопроводности, C - удельная теплоемкость.

3. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\rho+\rho\mathrm{div}\vec{V}=0. \qquad (3)$$

В качестве объектов калибровочных преобразований, которые оставляют неизменным гидродинамическое поле и тепловое поле, рассмотрим два вектора: вектор завихренности

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\vec{V} \tag{4}$$

и вектор теплового потока

$$\vec{Q} = -(\lambda\vec{\nabla}T + \frac{\lambda}{C}\frac{\partial\vec{V}}{\partial t})\,. \tag{5}$$

Преобразуем систему уравнений (1) - (3).Выражаем из (5) $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ и подставляем в (1) имея в виду, что

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V} = \nabla\frac{V^2}{2} + \left[\mathrm{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]. \tag{6}$$

$$\Delta\vec{V} = \nabla\mathrm{div}\vec{V} - \mathrm{rotrot}\vec{V}\,. \tag{7}$$

Тогда получим

$$\eta\,\mathrm{rot}\vec{\omega} = \frac{\rho C}{\lambda}\vec{Q} - \nabla\left[(p+\rho\frac{V^2}{2}) - \frac{4\eta}{3}\mathrm{div}\vec{V} - \rho C\cdot T\right] - \rho\left[\vec{\omega}\times\vec{V}\right]. \tag{8}$$

Представляем калибровочное уравнение в таком виде

$$(p+\rho\frac{V^2}{2}) - \frac{4\eta}{3}\mathrm{div}\vec{V} - \rho C\cdot T = 0. \tag{9}$$

Это уравнение можно назвать калибровкой Бернулли.

В такой калибровке уравнение (8) для вектора завихренности можно переписать так:

$$\mathrm{rot}\vec{\omega} = \frac{\rho C}{\lambda\eta}\vec{Q} - \frac{\rho}{\eta}\left[\vec{\omega}\times\vec{V}\right]. \tag{10}$$

В той же калибровке уравнение теплопроводности (2) преобразуется к виду:

$$\mathrm{div}\vec{Q} = \frac{\partial E}{\partial t} + \rho C(\vec{V}\nabla)T. \tag{11}$$

Здесь $E = p + \rho\frac{V^2}{2}$.

Чтобы получить(11) дифференцируем (9) по времени и сравниваем полученное уравнение с уравнением (2), принимая во внимание (5).

Уравнение для ротора теплового потока получаем после применения операции ротации к (5) с учетом того, что $\mathrm{rot}\vec{\nabla}T \equiv 0$

$$\mathrm{rot}\vec{Q} = -\frac{\lambda}{C}\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}. \tag{12}$$

К уравнениям (10)-(12) следует присоединить уравнение для расходимости вектора завихренности, получаемое из (4) с учетом того, что $\mathrm{divrot}\vec{V} \equiv 0$:

$$\mathrm{div}\vec{\omega} = 0 \tag{13}$$

В итоге, основные уравнения переноса в дифференциальной и интегральной форме имеют вид:

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathrm{rot}\vec{\omega}=\dfrac{\rho C}{\lambda\eta}\vec{Q}-\dfrac{\rho}{\eta}\left[\vec{\omega}\times\vec{V}\right] & \displaystyle\int\limits_L \vec{\omega}dL=\frac{C}{\lambda\nu}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_s \vec{Q}ds+\frac{1}{\nu}\iint\limits_s\left[\vec{V}\times\vec{\omega}\right]ds \\
\mathrm{rot}\vec{Q}=-\dfrac{\lambda}{C}\dfrac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}. & \displaystyle\int\limits_L \vec{Q}dL=-\frac{\lambda}{C}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_s \vec{\omega}\,ds \\
\mathrm{div}\vec{Q}=\dfrac{\partial E}{\partial t}+\rho C(\vec{V}\nabla)T & \displaystyle\iint\limits_s \vec{Q}\,ds=\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_\tau E d\tau+\rho C\iiint\limits_\tau\left[(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T)-T\mathrm{div}\vec{V}\right]d\tau \\
\mathrm{div}\vec{\omega}=0 & \displaystyle\int\limits_s \vec{\omega}ds=0
\end{array}\right\} \qquad (14)$$

Из интегральных уравнений следует, что поток вектора завихренности через произвольную замкнутую поверхность равен нулю. Это означает, что векторное поле завихренности носит чисто соленоидальный характер. У такого поля отсутствуют источники и стоки. Вихревые линии либо замкнуты, либо уходят в бесконечность. Циркуляция завихренности по контуру, охватывающему некоторую поверхность равна изменению со временем потока тепла и потоку спиральности. Следовательно, вихри создаются при изменении по времени теплового потока благодаря спиральности поля скоростей. Циркуляция теплового вектора по контуру через произвольную замкнутую поверхность обязана своему происхождению потоку завихренности. В отличие от поля завихренности тепловое поле имеет незамкнутые линии тока. Источниками и стоками линий тока теплового вектора $\vec{Q}$ является плотность энергии жидкости. Поток поля теплового вектора $\vec{Q}$ связан с изменением энергии потока и зависит от ориентации вектора скорости и градиента температуры.

2. Калибровка гиперболического уравнения теплопроводности

Вектор завихренности $\vec{\omega}$ является соленоидальным и заданным значениям вихревого поля соответствует семейство возможных значений векторов скорости. Обозначив

$$\vec{V}(\vec{r},t)=\vec{V}'(\vec{r},t)+\nabla\psi(\vec{r},t), \qquad (15)$$

где $\psi(\vec{r},t)$ - любая дифференцируемая скалярная функция, имеем

$$\vec{\omega}'=\mathrm{rot}\vec{V}'=\mathrm{rot}\vec{V}=\vec{\omega}.$$

Это означает, что преобразование (15) не изменяет вектора завихренности. Аналогично вектор теплового потока $\vec{Q}$ остается инвариантным при преобразованиях (15) вектора завихренности. В самом деле, заменим $\vec{\omega}$ через $\vec{\omega}'$ по формуле (15) в выражении для теплового потока (5).

$$\vec{Q}=-\lambda\vec{\nabla}T-\frac{\lambda}{C}\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}-\frac{\lambda}{C}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\psi=-\lambda\nabla\left(T+\frac{1}{C}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{\lambda}{C}\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}=-\lambda\vec{\nabla}T'-\frac{\lambda}{C}\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t},$$

И, следовательно, чтобы вектор теплового потока оставался неизменным при преобразованиях вектора завихренности необходимо и достаточно преобразовать температуру:

$$T'(\vec{r},t)=T(\vec{r},t)+\frac{1}{C}\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}. \tag{16}$$

Таким образом, заданным полям $\vec{\omega}$ и $\vec{Q}$ отвечает множество значений вектора скорости $\vec{V}$ и температуры T, связанных калибровочным преобразованием, которое можно получить со всевозможными функциями $\psi(\vec{r},t)$.Калибровочная инвариантность тепловых и гидродинамических полей при неоднозначности выбора вектора скорости $\vec{V}$ и температуры T требует наложения на них дополнительных условий. Чтобы получить калибровку, отличающуюся от Бернулли, подействуем оператором div на уравнение (15) и оператором $\frac{C}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}$ на (16), где a - величина, имеющая размерность скорости распространения возмущений в текучей среде. После вычитания получим

$$\Delta\psi-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\mathrm{div}\vec{V}+\frac{C}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}-\left(\mathrm{div}\vec{V}'+\frac{C}{a^2}\frac{\partial T'}{\partial t}\right).$$

Предположим, что $\mathrm{div}\vec{V}+\frac{C}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}\neq 0$, тогда если уравнение

$$\Delta\psi-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\mathrm{div}\vec{V}+\frac{C}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t},$$

имеет хотя бы одно частное решение для ψ, то существует функция ψ, при которой $\mathrm{div}\vec{V}'+\frac{C}{a^2}\frac{\partial T'}{\partial t}=0$. С калибровочным уравнением

$$\mathrm{div}\vec{V}+\frac{C}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}=0 \tag{17}$$

уравнение (11) преобразуется к следующему виду:

$$\Delta T-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{\rho C}{\lambda}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T)-\frac{\rho C}{\lambda}T\mathrm{div}\vec{V}. \tag{18}$$

Здесь учтено, что $\mathrm{div}\vec{\nabla}T=\Delta T$ и $(\vec{V}\nabla)T=(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T)-T\mathrm{div}\vec{V}$

В калибровке Бернулли из системы уравнений (14) для температуры получается уравнение параболического типа. Важнейшим обстоятельством, принципиально отличающим рассматриваемую систему уравнений (14), является существование взаимосвязи тепла и завихренности. При наличии завихренности создается тепловой поток, который характеризуется вихревым полем теплового вектора. Одновременно возможен и обратный процесс. Он связывает произвольное изменение во времени теплового поля с формированием поля завихренности. Если вектор $\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}$ в каждой точке поля представить в виде семейства прямых, то линии поля завихренности будут иметь вид концентрических окружностей, охватывающих эти прямые. При положительном знаке связи между векторами временной рост теплового потока способствует усилению ротора завихренности. С другой стороны из-за отрицательного знака противоположного процесса с увеличением интенсивности завихренности $\vec{\omega}$ вихревая составляющая теплового вектора ослабевает.

Система уравнений(14), таким образом, включает в себя описание континуальной среды, состоящей из взаимодействующих между собой гидродинамических и тепловых движений. Если задано значение характеристик жидкой среды ρ, C, η, λ и начальное значение полей $\vec{Q}, \vec{\omega}$, то интегрирование уравнений позволит найти распределение поля теплового вектора и поля завихренности в пространстве в любой последующий момент времени.

При постановке тепловых задач необходимо систему уравнений переноса уточнять исходя из условия калибровочной инвариантности. Каждой конкретной калибровке будет отвечать математическая модель, которая может существенно отличаться от моделей других калибровок. Вместе с тем калибровка полей не должна рассматриваться как вспомогательное преобразование системы уравнений переноса к уравнениям параболического или гиперболического типа. Представление процессов переноса с использованием калибровочных полей имеет более глубокий смысл. Калибровочные уравнения и уравнения для завихренности и теплового потока составляют единую систему, в которой поле температур и поле скоростей не являются независящими друг от друга величинами. Роль калибровочных соотношений в особенности выявляется при рассмотрении температурных волн. Использование замкнутой системы переноса импульса и тепла без соответствующей калибровки не позволяет получить переход к волновым решениям в процессе распространения тепла.

Литература

[1] Лыков А.В. Теплопроводность и диффузия. М.:Гизлегпром, 1941.

[2] Рубаков В.А. Классические калибровочные поля. М.: Эдитфиал УРРС,1999.

[3] Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. М.: ГИТТЛ, 1955.