УДК 539.3

Шевелев В. В.

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ СТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Аннотация. *На основе решения краевой задачи стационарного тепломассобменадля плоскости с разрезом конечной длины получено выражение для приращения термодинамического потенциала бесконечной пластины с внутреннй прямолинейной трещиной, из условия стационарности которогополучен критерий хрупкого разрушения материала и его средняя долговечность.*

Введение. В работах [1, 2] был развит термодинамический подход к формулировке критерия хрупкого разрушения материалов при тепловом и механическом, концентрационном (набухание) и механическом воздействиях на них, соответственно. В реальных условиях эксплуатации материалов все выше перечисленные факторы, как правило, действуют одновременно, оказывая существенное влияние на их долговечность. При этом эксплуатация изделий данного материала во многих случаях происходит в условиях установившегося (стационарного) процесса тепломассопереноса.

Наиболее опасным видом разрушения материалов является хрупкое разрушение, так как происходит внезапно, в отсутствие внешних признаков, указывающих на близкое разрушение. Поэтому, представляет интерес исследование в первую очередь хрупкого разрушения и прежде всего в той области внешнего воздействия, в которой с точки зрения механики деформируемого твердого тела разрушение материала не происходит, сколь бы ни было долгим внешнее воздействие (область слабого внешнего воздействия), но с кинетической точки зрения, как показано в [3], возможно и в области слабого внешнего воздействия в силу термофлуктуационного характера разрыва связей.

В работе [3] показано, что состояние динамического равновесия и эквивалентное ему условие стационарности термодинамического потенциала $\Delta\Phi$, разделяют, с точки зрения долговечности материала, области активного (где $\Delta\Phi$ уменьшается) и пассивного (где $\Delta\Phi$ возрастает) разрушения. Поэтому первоочередная задача при прогнозировании долговечности материалов состоит в нахождении условий стационарности $\Delta\Phi$, определяющих границу, разделяющую указанные области при заданных условиях внешнего воздействия, которая одновременно является и критерием хрупкого разрушения.

В данной работе, на основе решения задач стационарного тепломассопереноса для плоскости с разрезом нулевой толщины и длины l (прямолинейная внутренняя трещина), на берегах которого поддерживаются заданные значения температуры и концентрации

Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова, проспект Вернадского 86, Москва, Россия

диффундирующего вещества, и теории упругости, с учетом постоянного растягивающего напряжения σ, действующего перпендикулярно разрезу, получено выражение для термодинамического потенциала образца $\Delta\Phi$, из условия стационарности которого, найдены соответствующие критерии хрупкого разрушения материала.

Постановка задачи. Термодинамический потенциал системы Φ определяется соотношением [1, 2]:

$$\Phi = \iiint\limits_V f_0\left(C,T\right)dV - \frac{1}{2}\iiint\limits_V \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}dV - \frac{E}{2\left(1-2\nu\right)}\left(\beta_c\iiint\limits_V \left(C-C_0\right)\varepsilon_{ll}dV - \right.$$

$$\left. -\alpha_T\iiint\limits_V \left(T-T_0\right)\varepsilon_{ll}dV\right) + \iint\limits_{S_T}\alpha_n dS \tag{1}$$

При этом температурное и концентрационное поля являются решением следующей краевой задачи стационарного тепломассопереноса:

$$\Delta W\left(M\right) = 0, \quad M \in E^3 \setminus S_T, \tag{2}$$

$$W(M) = W_1, M \in S_T, \tag{3}$$

$$\lim_{\rho(M)\to\infty} W\left(M\right) = 0. \tag{4}$$

Для установления критерия разрушения хрупких материалов в условиях стационарного тепломассопереноса достаточно знать приращение термодинамического потенциала материала $\Delta\Phi$ относительно состояния этого же материала, но без трещины. Вычтем из Φ указанное значение термодинамического потенциала $\Phi^{(1)} = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \sigma_{ik}^{(1)}\varepsilon_{ik}^{(1)}dV$, где $\sigma_k^{(1)} = \sigma$, σ — постоянное внешнее растягивающее напряжение, а $\varepsilon_k^{(1)}$ — тензор деформации, соответствующий напряженному состоянию, возникающему в материале без трещины в условиях действия постоянного растягивающего напряжения σ. В результате придем к следующему выражению для $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = -\iiint\limits_V \sigma_{ik}^{(2)}\varepsilon_{ik}^{(1)}dV - \frac{1}{2}\iiint\limits_V \sigma_{ik}^{(2)}\varepsilon_{ik}^{(2)}dV + \iint\limits_{S_T}\alpha_n dS - \frac{E}{2\left(1-2\nu\right)}\iiint\limits_V W_0\left(\operatorname{div}\mathbf{U}^{(2)} + 2\operatorname{div}\mathbf{U}^{(1)}\right)dV \tag{5}$$

Здесь $W_0 = \alpha_T W_T + \beta_C W_C$, $W_T = T\left(M\right) - T_0$, $W_C = C\left(M\right) - C_0$.

При выводе (5) учтено, $\sigma_{ik}^{(1)}\varepsilon_{ik}^{(2)} = \sigma_{ik}^{(2)}\varepsilon_{ik}^{(1)} + \frac{E}{1-2\nu}W_0\operatorname{div}\mathbf{U}^{(1)}$.

Преобразуем далее первые два интеграла по объему материала V в интегралы по поверхностям, ограничивающим этот объем. Имеем с учетом условия равновесия:

$$\iiint\limits_V \sigma_{ik}^{(2)}\varepsilon_{ik}^{(2)}dV = \frac{1}{2}\iint\limits_{S_0}\sigma_{ik}^{(2)}n_k u_i^{(2)}dS + \frac{1}{2}\iint\limits_{S_T}\sigma_{ik}^{(2)}n_k u_i^{(2)}dS = \frac{1}{2}\iint\limits_{S_T}\sigma_{ik}^{(2)}n_k u_i^{(2)}dS = -\frac{1}{2}\iint\limits_{S_T}\sigma_{ik}^{(1)}n_k u_i^{(2)}dS,$$

так как на внешней стороне поверхности S_0, ограничивающей материал, выполняется условие: $\sigma_{ik}^{(1)} n_k = \sigma$ и, следовательно, $\sigma_{ik}^{(2)} n_k = 0$. На поверхности трещины S_T в отсутствие сил, действующих на ее берегах, выполняется условие: $\sigma_{ik}^{(2)} n_k = -\sigma_{ik}^{(1)} n_k$, $i = 1,2,3$.

Далее, аналогично,

$$\iiint\limits_V \sigma_{ik}^{(2)} \varepsilon_{ik}^{(1)} dV = \frac{1}{2} \iint\limits_{S_0} \sigma_{ik}^{(2)} n_k u_i^{(1)} dS + \frac{1}{2} \iint\limits_{S_T} \sigma_{ik}^{(2)} n_k u_i^{(1)} dS = 0,$$

так как $u_i^{(1)} = 0$ на предполагаемом месте появления прямолинейной внутренней трещины. Таким образом, окончательно, придем к следующему выражению для приращения термодинамического потенциала $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} \iint\limits_{S_T} \sigma_{ik}^{(1)} n_k u_i^{(2)} dS - \frac{E}{2(1-2\nu)} \iiint\limits_V W_0 \left(\operatorname{div} \mathbf{U}^{(2)} + 2 \operatorname{div} \mathbf{U}^{(1)} \right) dV + \iint\limits_{S_T} \alpha_n dS. \tag{6}$$

Из (6) следует, что для вычисления величины $\Delta\Phi$ необходимо знать компоненты вектора перемещения $\mathbf{U}^{(2)}$, температурное W_T, концентрационное W_C поля и $\operatorname{div} \mathbf{U}^{(2)}$, $\operatorname{div} \mathbf{U}^{(1)}$ В данной работе величина $\Delta\Phi$.

Вычислена в случае плосконапряженного состояния тонкой пластины с прямолинейной внутренней трещиной длины l, моделируемой плоскостью с разрезом нулевой толщины и длины l, на берегах которого поддерживаются заданные значения температуры $W_{T,1} = T_1 - T_0$ и концентрации $W_{C,1} = C_1 - C_0$ диффундирующего из окружающей среды в материал. В этих условиях обе функции W_T, W_C являются решениями одной и той же краевой задачи для уравнения Лапласа, которая с учетом симметричности искомых функций по переменным x и y в системе прямоугольных декартовых координат с осью Ox, расположенной вдоль разреза и осью Oy, расположенной перпендикулярно разрезу и посередине его, сводится к краевой задаче для уравнения Лапласа в полуплоскости, на границе которой $x = 0$ заданы разнородные граничные условия: $W(x,0) = W_1$ при $|x| < \dfrac{l}{2}$ и $\dfrac{\partial W}{\partial y} = 0$ при $y = 0$, $|x| > \dfrac{l}{2}$. В результате для получения решения задачи необходимо решить дуальные интегральные уравнения типа:

$$\int\limits_0^\infty \cos(\omega x) f(\omega) d\omega = W_1, \ 0 < x < \frac{l}{2}, \tag{7а}$$

$$\int\limits_0^\infty \cos(\omega x) f(\omega) \omega d\omega = 0, \ x > \frac{l}{2}, \tag{7б}$$

где $f(\omega)$ — функция, определяющая искомое решение указанных выше краевых задач для уравнения Лапласа по формуле:

$$W\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\omega x-\left|\omega\right|\left|y\right|\right)f\left(\omega\right)d\omega. \tag{8}$$

Функция $f\left(\omega\right)$ может быть найдена с помощью таблицы решений дуальных интегральных уравнений, приведенной в [3]. Для нахождения функций $\operatorname{div}\mathbf{U}^{(2)}$ и $u_y^{(2)}$ (так как в силу выбора системы координат указанным выше способом, $\sigma_{ik}^{(1)}n_k u_i^{(2)}=-\sigma u_y^{(2)}$ и $\operatorname{div}\mathbf{U}^{(2)}=\frac{\left(1-2\nu\right)}{E}\left(\sigma_{xx}^{(2)}+\sigma_{yy}^{(2)}\right)+3W_0$ в плосконапряженном состоянии) было использовано преобразование Фурье по переменной x уравнения равновесия в напряжениях. В результате для $\sigma_{xx}^{(2)}$, $\sigma_{yy}^{(2)}$ были получены следующие выражения:

$$\sigma_{yy}^{(2)}\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\omega x-\left|\omega\right|\left|y\right|\right)A\left(\omega\right)\left(1+\left|\omega\right|\left|y\right|\right)d\omega, \tag{9}$$

$$\sigma_{xx}^{(2)}\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\omega x-\left|\omega\right|\left|y\right|\right)A\left(\omega\right)\left(1-\left|\omega\right|\left|y\right|\right)d\omega. \tag{10}$$

Неизвестная функция $A\left(\omega\right)$ находится из условий:

$$\sigma_{yy}^{(2)}=-\sigma,\ \left|x\right|<\frac{l}{2}, \tag{11}$$

$$u_y^{(2)}\left(x,0\right)=0,\ \left|x\right|>\frac{l}{2}, \tag{12}$$

где

$$u_y^{(2)}\left(x,y\right)=-\frac{1}{E\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\omega x-\left|\omega\right|\left|y\right|\right)\frac{A(\omega)}{\left|\omega\right|}(2\operatorname{sign}y+\left(1+\nu\right)\left|\omega\right|y)d\omega \\ -\alpha_T\int_{y}^{\infty}W_T\left(x,\eta\right)d\eta-\beta_C\int_{y}^{\infty}W_C\left(x,\eta\right)d\eta. \tag{13}$$

Подстановка необходимых выражений в условия (11), (12) также приводит к следующему дуальному интегральному уравнению:

$$\int_{0}^{\infty}g\left(\omega\right)\cos\left(\omega x\right)d\omega=-\sigma\sqrt{2\pi}+\frac{1}{2}E\sqrt{2\pi}W_0\left(x,0\right),\ 0<x<\frac{l}{2}, \tag{14}$$

$$\int_{0}^{\infty}g\left(\omega\right)\cos\left(\omega x\right)\frac{d\omega}{\omega}=0,\ x>\frac{l}{2}. \tag{15}$$

Здесь $g\left(\omega\right)=2A\left(\omega\right)+E\overline{W}_0\left(\omega,0\right)$, где $\overline{W}_0\left(\omega,0\right)$ есть Фурье-образ $W_0\left(x,0\right)$.

Дуальное интегральное уравнение (14) также решалось с помощью таблицы решений дуальных интегральных уравнений [3]. Подстановка полученных выражений $\operatorname{div}\mathbf{U}^{(2)}\left(x,y\right)$,

$u_y^{(2)}(x,0)$ и $W_0(x,y)$ в формулу (6) привела к следующему выражению для приращения термодинамического потенциала $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = -\frac{\pi\sigma^2 l^2}{4E} - \frac{3\pi E l^2 W_0^2}{16(1-2\nu)} + 2\Delta\alpha_n l\,. \tag{16}$$

Обсуждение результатов. Из формулы (16) из условия экстремума $\Delta\Phi$ получим следующие выражения для критической длины трещины l^*, определяющей начало ее активного роста:

$$l^* = \frac{4\alpha_n}{\dfrac{\pi\sigma^2}{E} + \dfrac{3\pi E W_0^2}{4(1-2\nu)}} \tag{17}$$

и порога внешнего напряжения:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{4\alpha_n E}{\pi l} - \frac{3\pi\left(EW_0\right)^2}{4\pi(1-2\nu)}}\,, \tag{18}$$

начиная с которого при $\sigma > \sigma^*$ имеет место стадия активного роста трещины начальной длины l. В частности, из формулы (18) при $\sigma = 0$ получается следующий критерий хрупкого разрушения материалов в условиях стационарного тепломассопереноса в отсутствие внешнего механического воздействия:

$$W_0 \ge 4\sqrt{\frac{\alpha_{\text{п}}(1-2\nu)}{3\pi E l}}\,. \tag{19}$$

Таким образом, величина:

$$W_{0c} = 4\sqrt{\frac{\alpha_{\text{п}}(1-2\nu)}{3\pi E l}} \tag{20}$$

определяет критическое значение стационарного температурного и концентрационного полей на берегах наиболее опасной трещины, вызывающих ее необратимый рост.

Полученное выражение для термодинамического потенциала $\Delta\Phi$ позволяет оценить, следуя [3], среднюю долговечность τ материала в условиях стационарного тепломассопереноса в условиях стационарного тепломассопереноса в области неразрушающего мгновенно внешнего воздействия:

$$\tau \approx \frac{1}{\lambda w^+(l^*)}\exp\left(\frac{\Delta\Phi(l^*)}{kT}\right)\sqrt{\frac{2\pi kT}{\left|\Delta\Phi''(l^*)\right|}}\,, \tag{21}$$

где $w^+(l) = \nu_0 \exp\left(-\dfrac{1}{kT}\left(U - V_{\text{ф}}\chi\sigma\sqrt{\dfrac{l}{\lambda}}\right)\right)$; $\chi = 1.12$. Вычисляя входящие в (21) величины, найдем среднюю долговечность материала в указанных выше условиях внешнего воздействия:

$$\tau \approx \frac{1}{\lambda w^{+}\left(l^{*}\right)} \exp\left(\frac{\lambda_{\pi}\alpha_{\Pi} l^{*}}{kT}\right)\sqrt{\frac{\pi kTl^{*}}{\alpha_{\Pi}\lambda_{\pi}}}\,. \tag{22}$$

Из формулы (22) следует, что даже в отсутствие внешнего растягивающего напряжения $(\sigma = 0)$ при наличии стационарного тепломассообмена через берега наиболее опасной трещины, средняя долговечность материала остается хотя и очень большой, но все же конечной. Если же учесть, что согласно [3] среднеквадратичное отклонение долговечности пропорционально τ, то отсюда следует, что стационарный тепломассобмен материала, содержащего трещины, со средой является фактором, способствующим егоразрушению.

Выводы

1. Получено выражение для изменения термодинамического потенциала $\Delta\Phi$ материала при наличии тепломассобменаобмена материала со средой через берега наиболее опасной трещины.

2. Из условия стационарности $\Delta\Phi$ получен критерий хрупкого разрушения материала и его средняя долговечность в условиях совместного воздействия на материал механического, температурного и концентрационного полей.

Обозначения

$C(M)$ — концентрация в точке M, моль/м^3;

C_0 — некоторая заданная концентрация, при которой система в отсутствие внешних сил считается недеформированной, моль/м^3**;**

C_1 — концентрация на поверхности трещины, моль/м^3;

E — модуль Юнга, Н/м^2;

$f_0(C,T)$ — свободная энергия единицы объема недеформированного материала, Дж/м^3;

i, k — тензорные индексы;

k — постоянная Больцмана, Дж/град;

l — длина трещины, м;

l^* — длина трещины в состоянии динамического равновесия, м;

S_0 — внешняя поверхность образца, м^2;

$S_{\text{Т}}$ — поверхность трещины (Т — трещина), м^2;

$\operatorname{sign} y$ — знаковая функция, определяемая следующим образом: $\operatorname{sign} y = \begin{cases} -1, & y < 0; \\ 0, & y = 0; \\ 1, & y > 0; \end{cases}$

$T(M)$ — температура в точке M, К;

T_1 — температура на поверхности трещины, К;

T_0 — некоторая заданная температура, при которой система в отсутствие внешних сил считается недеформированной, К**;**

$\mathbf{U}$ — вектор перемещений, м;

U — энергия активации разрыва связей при $\sigma = 0$, Дж;

V — объем тела, м^3;

$V_{\text{ф}}$ — флуктуационный объем (ф — флуктуация), м^3;

$v_{\text{Т}}$ — скорость роста трещины (Т — трещина), м/с;

$W(M) = T(M) - T_0$ или $W(M) = C(M) - C_0$;

$W_1 = T_1 - T_0$, или $W_1 = C_1 - C_0$;

$W_0 = \alpha_T(T_1 - T_0) + \beta_c(C_1 - C_0)$;

$w^+(l)$ — частота разрыва связей в вершине трещины длины l, с$^{-1}$;

α_T — коэффициенты линейного расширения материала при нагреве, град$^{-1}$;

$\alpha_{П}$ — изменение удельной свободной поверхностной энергии материала за счет адсорбции диффундирующего вещества на поверхности трещины (П — поверхность), Дж/м^2;

β_c — коэффициент линейного расширения материала при набухании, моль$^{-1}$;

Ф — термодинамический потенциал системы, Дж;

ΔФ — приращение термодинамического потенциала системы, Дж;

λ_π — длина фронта трещины, участвующая в ее флуктуационном продвижении, м (π — первая буква от греческого слова «периметр»), м;

λ — характерное расстояние, на которое продвигается трещина при однократной флуктуации разрыва связей, м;

ν —коэффициент Пуассона;

ν_0 — частота попыток преодолеть энергетический барьер на пути разрыва связей, с$^{-1}$;

$\rho(M)$ — расстояние точки M до начала координат, м;

σ — растягивающее внешнее напряжение, Н/м^2;

σ_{ik} (Н/м^2) и ε_{ik}, соответственно, тензоры напряжений и деформаций;

σ^* — внешнее напряжение, определяющее начало активного роста трещины, Н/м^2;

τ — средняя долговечность материала, с.

Литература

1. Шевелев В. В. Термодинамический подход к формулировке термомеханического критерия разрушения. // Автоматизированная подготовка машиностроительного производства, технология и надежность машин, приборов и оборудования. Материалы Международной научно-технической конференции. — Вологда, ВоГТУ, 2005. Т. 1, с. 177 — 180.

2. Шевелев В. В.Термодинамический критерий хрупкого разрушения материалов при набухании. // Там же. — Вологда, ВоГТУ, 2006. Т. 1, с. 215 — 220.

3. Карташов Э. М., Цой Б., Шевелев В. В. Структурно-статистическая кинетика разрушения полимеров. — М.: Химия, 2002. 736 с.