УДК 532.517.4 : 536.24

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛООБМЕНЕ В КАНАЛАХ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЧИСЛА БИО

И.Е.Лобанов

Московский государственный авиационный институт
(технический университет)

Получены точные решения задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био трубопровода при достаточно низких числах Брюна как без учёта, так и с учётом времени пребывания теплоносителя в трубопроводе, часто встречающейся в инженерной практике при расчёте регенеративных теплообменных аппаратов.

Ключевые слова

Теплообмен, нестационарный, теплоноситель, число Био.

Обозначения

c — теплоёмкость, Дж/(кг·К); c_p — теплоёмкость при постоянном давлении, Дж/(кг·К); d — внутренний диаметр трубы, м; F — площадь поперечного сечения, м^2; Ho — интегральный параметр гомохронности; St — число Стантона; T — температура, К; U — омываемый периметр, м; w — скорость теплоносителя, м/с; x — продольная координата, м; α — коэффициент теплоотдачи внутри трубы, Вт/(м^2·К); δ — толщина стенки трубопровода, м; λ_w — коэффициент теплопроводности материала стенки, Вт/(м·К); ρ — плотность, кг/м^3; τ — время, с.

Введение

В инженерной практике очень часто встречаются задачи расчёта нестационарных температурных полей потока теплоносителя и стенки для тонкостенных трубопроводов в условиях относительно малой интенсивности теплообмена, когда число Био очень мало ($\mathrm{Bi}=\alpha\delta/\lambda_w<<1$). В связи с этим, представляет интерес точное решение задачи о нестационарном теплообмене в каналах при вышеуказанных условиях.

1. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био без учёта времени пребывания теплоносителя в трубопроводе

Данная методика позволяет произвести расчёт динамики тонких трубопроводов с учётом имеющихся экспериментальных данных по нестационарному коэффициенту теплоотдачи.

Закон изменения температуры теплоносителя на входе может быть произвольным.

Такого рода задачи применяются при расчёте регенеративных теплообменных аппаратов, выполненных в виде различных насадок (шаров, сеток, трубок и т.п.), которые заполняют трубу и периодически омываются горячими и холодными теплоносителями, где пренебрегается перетечками теплоты по материалу насадки в продольном и поперечном направлениях [1].

В настоящее время отсутствуют достаточно простые инженерные методы решения этих задач, позволяющие учесть влияние нестационарных граничных условий на коэффициент теплоотдачи [2—4].

Для описания нестационарного теплообмена в трубе, по которой течёт теплоноситель с известным коэффициентом теплоотдачи, достаточно рассмотреть одномерное уравнение энергии для теплоносителя и уравнение теплового баланса для стенки, которое заменяет уравнение теплопроводности при $\mathrm{Bi} << 1$ и при отсутствии перетечек тепла вдоль оси трубы, что справедливо для достаточно тонкостенных труб, и при отсутствии утечек тепла снаружи трубопровода (при достаточно низких числах Брюна Br):

$$\begin{cases} \left(Fc_p\rho\right)_b \dfrac{\partial T_b}{\partial \tau} + \left(Fc_p\rho w\right)_b \dfrac{\partial T_b}{\partial x} = \alpha U\left(T_w - T_b\right); \\ \left(Fc\ \rho\right)_w \dfrac{\partial T_w}{\partial \tau} = \alpha U\left(T_w - T_b\right). \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\tau = 0:\ T_b(x,0) = T_{b0}(x),\ T_w(x,0) = T_{w0}(x); \\ &x = 0:\ T_b(0,\tau) = T_{b1}(0). \end{aligned} \tag{2}$$

Введём безразмерные переменные $\eta(x,\tau)$ и $\xi(x,\tau)$ на основании того, что коэффициент теплоотдачи является известной функцией координаты и времени $\alpha = f(x,\tau)$:

$$\eta(x,\tau) = \int\limits_0^{Ho} 4\,StCdHo\ ; \tag{3}$$

$$\xi(x,\tau) = \int\limits_0^{X} 4\,StdX\ , \tag{4}$$

где $C = \left(Fc_p\rho\right)_b / \left(Fc\rho\right)_w$; $St = \alpha / \left(Fc_p\rho\right)_b$; $X = x/d$; $Ho = \int\limits_0^{\tau} (w/d)\,d\tau$.

Для газовых теплоносителей $\left(Fc_p\rho\right)_b << \left(Fc\rho\right)_w$ и $\dfrac{\partial T_b}{\partial \tau} << w\dfrac{\partial T_b}{\partial x}$, то

$\left(Fc_p\rho\right)_b \dfrac{\partial T_b}{\partial \tau} << \left(Fc\rho\right)_w \dfrac{\partial T_w}{\partial \tau}$ и $\left(Fc_p\rho\right)_b \dfrac{\partial T_b}{\partial \tau} << \left(Fc_p\rho w\right)_b \dfrac{\partial T_b}{\partial x}$. В работах [2—4] доказывается, что система (1) сводится к следующему нижеприведённому виду для газообразных теплоносителей $\left(\Delta T_w\left(\xi,\eta\right) = T_w\left(\xi,\eta\right) - T_{w0}\left(\xi\right)\right.$; $\left.\Delta T_b\left(\xi,\eta\right) = T_b\left(\xi,\eta\right) - T_{b0}\left(\xi\right)\right)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta T_b}{\partial \xi} = \Delta T_w - \Delta T_b; \\ \dfrac{\partial \Delta T_w}{\partial \eta} = \Delta T_b - \Delta T_w. \end{cases} \tag{5}$$

Для случая скачка температуры теплоносителя на входе в канал $\Delta T_{b1}\left(\xi,\eta\right) = T_{b1} - T_{b1}\left(0\right)$:

$$\eta = 0, \quad \Delta T_w = 0, \quad \xi = 0, \quad \Delta T_b = \Delta T_{b1}, \tag{6}$$

решение системы (5), полученное с помощью преобразования Лапласа [2—4] выглядит следующим образом:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_{b1}} = \int\limits_0^{\eta} e^{-\xi} e^{-\eta} I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\,\right] d\eta\ ; \tag{7}$$

$$\frac{\Delta T_b}{\Delta T_{b1}} = \int\limits_0^{\eta} e^{-\xi} e^{-\eta} I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\,\right] d\eta + e^{-\xi} e^{-\eta} I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\,\right], \tag{8}$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка [5]:
$I_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{1}{\nu!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2\nu+n}$, где $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt$ — гамма-функция.

При $n = 0$ имеем:

$$I_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!\,\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}. \tag{9}$$

Вплоть до настоящего времени решение уравнения (5) в квадратурах (7)—(8) определяли только численным образом.

Для определения $\dfrac{\Delta T_w}{\Delta T_{b1}}$ и $\dfrac{\Delta T_b}{\Delta T_{b1}}$ использовались соответствующие диаграммы [1—4].

Аналогичные диаграммы приведены, например, в [1] для расчёта полей температур матрицы и теплоносителя для регенеративных теплообменников.

В рамках данной работы ставится задача точного решения системы (5).

Полученные точные решения системы (5) имеют широкую общность и могут быть непосредственно использоваться для расчётов нестационарных полей температур матрицы и теплоносителя для регенеративных теплообменных аппаратов.

Для получения точного решения системы (5) необходимо разложить в степенной ряд экспоненциальную функцию и функцию Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка I_0, входящие в квадратуры (7)—(8) [5]:

$$e^{\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \Rightarrow e^{-\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \eta^n ; \tag{10}$$

$$\begin{aligned} I_0(2\sqrt{\xi\eta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{2} \right)^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\xi^n}{n!\,\Gamma(n+1)} \right] \eta^n . \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, имеем два степенных ряда:

$$I_0(2\sqrt{\xi\eta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n ; \tag{12}$$

$$e^{\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^n , \tag{13}$$

где $a_n = \dfrac{\xi^n}{n!\,\Gamma(n+1)}$, $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Произведение экспоненциальной функции и функцию Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка равно:

$$\begin{aligned} I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\right] e^{-\eta} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right) \eta^n . \end{aligned} \tag{14}$$

После подстановки, получим:

$$I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\right] e^{-\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi^m}{m!\,\Gamma(m+1)} \right) \eta^n . \tag{15}$$

Теперь необходимо провести интегрирование выражения, используя правило интегрирования бесконечных степенных рядов (15):

$$\int_0^{\eta} I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\right]e^{-\eta}d\eta = \int_0^{\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{m!\Gamma(m+1)}\right)\eta^n d\eta =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\eta}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{m!\Gamma(m+1)}\right)\eta^n d\eta = \tag{16}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{m!\Gamma(m+1)(n+1)}\right)\eta^{n+1}\Bigg|_0^{\eta}.$$

После подстановки пределов интегрирования, окончательно получим:

$$\int_0^{\eta} I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\right]e^{-\eta}\,e^{-\xi}\,d\eta = e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{m!\Gamma(m+1)(n+1)}\right)\eta^{n+1}. \tag{17}$$

Окончательные выражения для решений системы (1) будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_{b1}} = e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{m!\Gamma(m+1)(n+1)}\right)\eta^{n+1}; \tag{18}$$

$$\frac{\Delta T_b}{\Delta T_{b1}} = e^{-\xi}\left\langle e^{-\eta}\,I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\right]+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{m!\Gamma(m+1)(n+1)}\right)\eta^{n+1}\right\rangle. \tag{19}$$

Используя свойство гамма-функции $\Gamma(\mathrm{m}+1)=\mathrm{m}!$ [5], получим:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_{b1}} = e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2(n+1)}\eta^{n+1}; \tag{20}$$

$$\frac{\Delta T_b}{\Delta T_{b1}} = e^{-\xi}\left\langle e^{-\eta}\,I_0\left[2\sqrt{\xi\eta}\right]+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2(n+1)}\eta^{n+1}\right\rangle. \tag{21}$$

Расчёт по точным решениям (18)—(19) или (20)—(21) полностью соответствует данным, представленным на диаграммах, приведённых в [2—4], однако расчёт по вышеупомянутым решениям имеет перед последними неоспоримое преимущество, поскольку данные [2—4] получены численным образом, а решения (18)—(19) или (20)—(21) являются точными аналитическими решениями.

Преимущество точных решений состоит также в том, что они не имеют ограничений относительно определяющих параметров ξ и η, имеющихся в [2—4].

3. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био с учётом времени пребывания теплоносителя в трубопроводе

Точные решения (20)—(21), полученные в предыдущем разделе, позволяют рассчитать теплообмен в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био без учёта времени пребывания теплоносителя в трубопроводе, но не позволяют рассчитать теплообмен, если время пребывания теплоносителя в трубопроводе становится значительным. Вышеуказанные решения будут в полной мере справедливыми для относительно высоких скоростей потока, когда время пребывания теплоносителя в трубопроводе относительно невелико. Например, в настоящее время находят относительно широкое применение нагрев и охлаждение трубопроводов при малых расходах газа. В этом случае время пребывания теплоносителя в трубопроводе становится непосредственно сопоставимым с временем собственно самóго нестационарного процесса. Время пребывания теплоносителя в трубопроводе следует также учитывать для условий течения в каналах теплоносителей в виде капельных жидкостей. Для решения задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био с учётом времени пребывания теплоносителя в трубопроводе рассмотрим систему уравнений (1) с граничными и начальными условиями (2). Для этого введём безразмерные переменные, несколько отличные от аналогичных безразмерных переменных, вводимых при решении задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био без учёта времени пребывания теплоносителя в трубопроводе (3)—(4), на основании того, что коэффициент теплоотдачи является известной функцией координаты и времени $\alpha = f(x, \tau)$:

$$\eta(x, \tau) = \int_0^{Ho} 4\, St dHo \ ; \tag{22}$$

$$\xi(x, \tau) = \int_0^{X} 4\, St dX \ , \tag{23}$$

В работах [2—4] доказывается, что система уравнений (1) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{C}} \dfrac{\partial \Delta \mathrm{T_w}}{\partial \eta} = -\left(\Delta \mathrm{T_w} - \Delta \mathrm{T_b}\right); \\ \dfrac{\partial \Delta \mathrm{T_b}}{\partial \eta} + \dfrac{\partial \Delta \mathrm{T_b}}{\partial \xi} = \Delta \mathrm{T_w} - \Delta \mathrm{T_b}. \end{cases} \tag{24}$$

Для случая скачка температуры теплоносителя на входе в канал $\Delta T_{b1}(\xi, \eta) = T_{b1} - T_{b1}(0)$:

$$\eta = 0, \quad \Delta T_w = 0, \quad \xi = 0, \quad \Delta T_b = \Delta T_{b1}, \tag{25}$$

Решение системы (5), полученное с помощью преобразования Лапласа [2—4] выглядит следующим образом:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_{b1}} = \begin{cases} 0 & \forall\ \xi > \eta; \\ C\int\limits_0^\eta e^{-\xi(1-C)} e^{-C\eta} I_0\left(2\sqrt{C\xi(\eta-\xi)}\right) d\eta & \forall\ \xi < \eta. \end{cases} \tag{26}$$

$$\frac{\Delta T_b}{\Delta T_{b1}} = \begin{cases} 0 & \forall\,\xi > \eta; \\ e^{-\xi(1-C)} e^{-C\eta} I_0\left(2\sqrt{C\xi(\eta-\xi)}\right) d\eta + C\int\limits_0^\eta e^{-\xi(1-C)} e^{-C\eta} I_0\left(2\sqrt{C\xi(\eta-\xi)}\right) d\eta & \forall\,\xi < \eta. \end{cases} \tag{27}$$

Для получения точного решения системы (24) применим тот же метод, который был применён ранее в рамках данной работы при решении задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био без учёта времени пребывания теплоносителя в трубопроводе. Окончательные выражения для решений системы (24) будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_{b1}} = \begin{cases} 0 & \forall\ \xi > \eta; \\ e^{-\xi} C \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi^m C^n (\eta-\xi)^{n+1}}{(m!)^2 (n+1)} & \forall\ \xi < \eta. \end{cases} \tag{28}$$

$$\frac{\Delta T_b}{\Delta T_{b1}} = \begin{cases} 0 & \forall\,\xi > \eta; \\ e^{-\xi} \left\langle e^{-C(\eta-\xi)} I_0\left[2\sqrt{C\xi(\eta-\xi)}\right] + C\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi^m C^n (\eta-\xi)^{n+1}}{(m!)^2 (n+1)} \right\rangle & \forall\,\xi < \eta. \end{cases} \tag{29}$$

Расчёт по точным решениям (28)—(29) полностью соответствует данным, представленным на диаграммах, приведённых в [2—3, 6] для $C = 1.0$, но имеет перед последними неоспоримое преимущество, поскольку данные, представленные в [2—3, 6] получены численным образом.

Преимущество полученных точных решений состоит также в том, что они не имеют ограничений относительно определяющих параметров ξ и η, имеющихся в [6], где приведены диаграммы для $\frac{\Delta T_w}{\Delta T_{b1}}$ и $\frac{\Delta T_b}{\Delta T_{b1}}$ для следующего диапазона определяющих параметров: $\eta = 0 \div 100$; $\xi = 0 \div 5$; $C = 0{,}001 \div 100$.

Диаграммы для $\frac{\Delta T_w}{\Delta T_{b1}}$ и $\frac{\Delta T_b}{\Delta T_{b1}}$, приведённые в [6], позволяют детерминировать теплообмен в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био с учётом времени пребывания теплоносителя в трубопроводе с ограниченной точностью и с определённой дискретностью при ограниченном диапазоне определяющих параметров. Вышеуказанных недостатков полностью лишены точные решения, полученные в рамках данной работы, следовательно, они имеют перед существующими численными решениями неоспоримые преимущества.

Выводы

В данном исследовании получены точные решения задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био с учётом времени пребывания теплоносителя в трубопроводе, часто встречающиеся в инженерной практике и могут применяться при расчёте регенеративных теплообменных аппаратов, в которых можно пренебречь перетечками теплоты по материалу насадки в продольном и поперечном направлениях. Полученные точные решения имеют неоспоримое преимущество перед существующими численными, поскольку выявляют имманентную связь между определяющими и определяемыми параметрами; ими можно непосредственно воспользоваться при расчёте, не прибегая к помощи диаграмм или вычислительной техники.

Литература

1. Теория тепломассообмена / Под ред. А.И.Леонтьева. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. 683 с.
2. Нестационарный теплообмен / Кошкин В.К., Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А. М.: Машиностроение, 1973. 328 с.
3. Kalinin E.K., Dreitser G.A. Unsteady Convective Heat Transfer in Channels / Advances in heat transfer. Volume 25. New York: Academic Press, 1994. P. 1—150.
4. Галицейский Б.М., Дрейцер Г.А. Нестационарное поле температур стенки трубы и теплоносителя при малых значениях критерия Bi. — Изв. вузов. Авиационная техника. 1970. № 2. С. 90—98.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. Дрейцер Г.А., Кузьминов В.А. Расчет разогрева и охлаждения трубопроводов. М.: Машиностроение, 1977. 128