

СВОБОДНАЯ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ С ЧАСТИЦАМИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Л. П. Холпанов¹, Е. И. Некрасова², А. К. Некрасов³

¹ Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка, Россия

² Электростальский политехнический институт (ф-ал МИСиС), Электросталь, Россия

³ Московский государственный университет инженерной экологии, Москва, Россия

e-mail: nekrasov55@yandex.ru

Проведено математическое моделирование движения и осаждения монодисперсных сферических частиц в гетерогенной среде, при свободной конвекции несущей вязкой несжимаемой жидкости в квадратной полости с периодическими по времени тепловыми граничными условиями при боковом нагреве. Математическое моделирование базировалось на совместном решении нестационарных уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, уравнений неразрывности и энергии для несущей жидкости, записанных в переменных Эйлера, и уравнения для дисперсной частицы, записанного в переменных Лагранжа. Совместное решение системы уравнений для несущей среды и частицы получены конечно-разностным методом. Результаты расчетов для несущей среды представлены в виде полей вектора скорости, изолиний функции тока и температуры, и траекторий движения дисперсных частиц.

Ключевые слова

Свободная конвекция, гетерогенные среды, дисперсные частицы, метод конечных разностей

Условные обозначения

$a = \lambda / (c_p \rho_1)$ – коэффициент температуропроводности, м²/с; C – коэффициент сопротивления сферической частицы; c_p – удельная теплоемкость, Дж/(кг К); d – диаметр дисперсной частицы, м; \mathbf{e} – единичный вектор направления относительной скорости частицы; \mathbf{F} – вектор ускорения массовых сил; $Ga = gL^3/\nu^2$ – критерий Галилея; $Gr = Ga \cdot \mathcal{G}_{w0} \beta_T$ – критерий Грасгофа; g – ускорение свободного падения, м/с²; L – характерный размер, м; $Pr = \nu/a$ – критерий Прандтля; p' – относительное давление, Па; t – время, с; U, V – компоненты вектора скорости сплошной среды соответственно в направлении осей x и y , м/с; \mathbf{V} – вектор скорости; w – модуль относительной скорости частицы, м/с; x, y – координаты по пространству, м; α – угол поворота от оси x до вектора \mathbf{e} , рад; β_T – коэффициент термического расширения несущей среды, 1/К; φ – угол отклонения вектора силы тяжести относительно вертикали, рад; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м К); ν – коэффициент кинематической вязкости несущей фазы, м²/с; \mathcal{G} – относительная температура, К; $\theta = \mathcal{G}/\mathcal{G}_{w0}$ – безразмерная температура; ρ – плотность, кг/м³; $\tau = t\nu/L^2$ – безразмерное время; ω – вихрь; ψ – функция тока. Индексы: отн – относительная; w – стенка (wall); x – по направлению оси x ; y – по направлению оси y ; 0 – начальные параметры; 1 – несущая среда; 2 – частица; $\bar{}$ – безразмерные величины.

Введение

Свободно-конвективные движения неоднородных многофазных сред с различного рода частицами широко распространены, как в природе, так и в технике [1]. В энергетике и ряде областей промышленного производства (нефтяная, химическая, пищевая, фармацевтическая, металлургическая) такие неоднородные многофазные среды с протекающим в них сложным тепло- и массообменом и химическими превращениями играют определяющую роль при реализации различных технологических процессов [2]. Во многих случаях эти движения вызываются периодическими динамическими или тепловыми воздействиями, которые усложняют гидродинамику и могут оказывать существенное влияние на интенсивность протекающих в этих гетерогенных средах тепло- и массообменных и химических процессов [3].

Постановка задачи

В данной работе проведено численное моделирование движения твердых монодисперсных сферических частиц в гетерогенной среде в условиях нестационарной термогравитационной конвекции несущей вязкой несжимаемой жидкости, вызываемой периодическим тепловым воздействием на одной из стенок полости прямоугольного поперечного сечения (рис.1). В начальный момент времени жидкость в полости неподвижна и имеет однородную нулевую начальную относительную температуру. В течение всего времени процесса на одной из боковых стенок полости задана периодически изменяющаяся температура $\mathcal{G}_w = \mathcal{G}_{w0}(1 + A \sin \Omega t)$. Вторая боковая стенка поддерживается при начальной температуре, а две другие стенки полости теплоизолированы. Концентрация дисперсных частиц мала, поэтому их влиянием на динамику и тепловой режим несущей среды пренебрегаем.

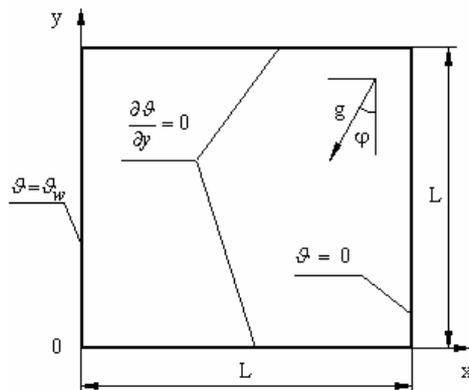


Рис.1. Расчетная область с тепловыми граничными условиями

Для нахождения скорости относительного движения и построения траекторий движения однородных дисперсных частиц в гетерогенной среде применен метод, который основан на совместном решении уравнений для несущей среды, записанных в переменных Эйлера, и уравнения для дисперсной частицы, записанного в переменных Лагранжа. Этот метод подробно изложен в работе [4,5] и успешно применен для моделирования относительного движения фаз в дисперсных потоках, как при вынужденной [5], так и при свободной конвекции [6].

Для определения полей скорости V_1 и температуры \mathcal{G} при ламинарном течении вязкой несжимаемой несущей жидкости с постоянными свойствами и без учета влияния на нее частиц (концентрация частиц мала), применена система из нестационарных уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска, уравнения неразрывности и уравнения энергии, записанных в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + (\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{V}_1 + \mathbf{g} \beta_T \vartheta, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_1 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{V}_1 \nabla) \vartheta = a \Delta \vartheta \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$t=0: \quad \vartheta = 0, \quad \mathbf{V}_1 = 0, \quad (4)$$

$$y=0; L, \quad 0 \leq x \leq L: \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{V}_1 = 0, \quad (5)$$

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq L: \quad \vartheta = \vartheta_{w0}(1 + A \sin \Omega t), \quad \mathbf{V}_1 = 0, \quad (6)$$

$$x=L, \quad 0 \leq y \leq L: \quad \vartheta = 0, \quad \mathbf{V}_1 = 0. \quad (7)$$

Скорость \mathbf{V}_2 дисперсной сферической частицы с диаметром d и плотностью ρ_2 совместно с системой (1)–(7) находится из решения векторного уравнения движения частицы, которое в переменных Лагранжа имеет вид [4]

$$\frac{dV_2}{dt} = -kw^2 \mathbf{e} + \mathbf{F}, \quad (8)$$

где: $k = \frac{3}{4} C \rho_1 / (\rho_2 d)$ - коэффициент для сферической частицы, связанный с силой сопротивления при относительном движении частицы в вязкой жидкости.

Вектор скорости дисперсной частицы представляется в виде суммы векторов скоростей сплошной среды и относительной скорости частицы

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_{\text{отн}}. \quad (9)$$

Вектор относительной скорости $\mathbf{V}_{\text{отн}}$ выражается через модуль относительной скорости $w = |\mathbf{V}_{\text{отн}}|$ и угол α

$$\mathbf{V}_{\text{отн}} = (w \cos \alpha, w \sin \alpha) = w \mathbf{e}, \quad (10)$$

где угол α равен значению угла поворота от орта \mathbf{i} оси координат x до вектора \mathbf{e} .

В работе [5] показано, что для определения скорости частицы векторное уравнение (8) приводится к двум скалярным уравнениям с двумя неизвестными w и α с заданными начальными условиями

$$\frac{dw}{dt} = -kw^2 - (P_x + E_x - F_x) \cos \alpha - (P_y + E_y - F_y) \sin \alpha, \quad (11)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = (P_x + E_x - F_x) \frac{\sin \alpha}{w} - (P_y + E_y - F_y) \frac{\cos \alpha}{w}, \quad (12)$$

$$t=0: \quad w = w_0, \quad \alpha = \alpha_0. \quad (13)$$

Входящие в уравнения (11) и (12) компоненты P_i , E_i и F_i ($i=x,y$) в декартовой системе координат имеют вид

$$P_x = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y}, \quad P_y = U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$E_x = w \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \alpha \right), \quad E_y = w \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \alpha \right),$$

$$F_x = g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \sin \varphi, \quad F_y = -g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \cos \varphi,$$

где U, V - компоненты вектора скорости сплошной среды \mathbf{V}_1 для двумерного случая в декартовой системе координат.

Взаимодействие частиц с несущей средой учитывается в уравнениях (11) и (12) через локальные компоненты поля скорости несущей среды U, V и их дифференциальные характеристики $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$, а также физико-химические и гидродинамические характеристики самой частицы. Поэтому для определения величины скорости и направления движения дисперсной частицы систему уравнений (11)–(13) необходимо решать совместно с системой уравнений движения несущей среды (1)–(7).

Входящий в параметр k уравнения (8) коэффициент сопротивления C для одиночной сферической частицы, движущейся в несущей среде с местной относительной скоростью w , принимался зависящим от числа Рейнольдса $Re = wd/\nu$, и определялся при $Re < 1$ по соотношению $C = \frac{24}{Re}$ [1].

Текущие координаты $x(t)$ и $y(t)$ положения дисперсной частицы в пространстве при известных начальных координатах частицы x_0, y_0 находились из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = U + w \cos \alpha, \quad (14)$$

$$\frac{dy}{dt} = V + w \sin \alpha. \quad (15)$$

Система уравнений (1)–(3), (11)–(12), (14), (15) с соответствующими краевыми условиями решена численно конечно-разностным методом.

Методика решения

При решении задачи все уравнения и краевые условия к ним с помощью соответствующих масштабов приводятся к безразмерному виду. В качестве масштабов принимались: для пространства – ширина расчетной области L ; для времени – L^2/ν ; для скорости – ν/L ; для температуры – \mathcal{G}_{w0} . Кроме того, для исключения давления из числа переменных в уравнениях движения для несущей среды вводились функция тока ψ и вихрь ω , связанные с безразмерными компонентами скорости $\bar{U} = \frac{UL}{\nu}$ и $\bar{V} = \frac{VL}{\nu}$ соотношениями

$$\bar{U} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{V} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}. \quad (16)$$

С учетом введенных масштабов и соотношений (16) система уравнений (1)–(3) и краевые условия (4)–(7) для несущей среды в переменных вихрь – функция тока – температура примет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{y}^2} - Gr \left(\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \cos \varphi - \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \sin \varphi \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} = \omega, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \right), \quad (19)$$

$$\tau = 0: \quad \psi = \omega = \theta = 0, \quad (20)$$

$$\bar{x} = 0, \quad 0 \leq \bar{y} \leq 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \theta = 1 + A \sin \bar{\Omega} \tau, \quad (21)$$

$$\bar{x} = 1, \quad 0 \leq \bar{y} \leq 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \theta = 0, \quad (22)$$

$$\bar{y} = 0; 1, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (23)$$

Уравнения (12)–(15) для частицы с относительным диаметром $\bar{d} = d/L$ и входящие в них компоненты P_i, E_i, F_i в безразмерных переменных с теми же масштабами отнесения представим как

$$\frac{d\bar{w}}{d\tau} = -\bar{k}\bar{w}^2 - (\bar{P}_x + \bar{E}_x - \bar{F}_x) \cos \alpha - (\bar{P}_y + \bar{E}_y - \bar{F}_y) \sin \alpha, \quad (24)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = (\bar{P}_x + \bar{E}_x - \bar{F}_x) \frac{\sin \alpha}{\bar{w}} - (\bar{P}_y + \bar{E}_y - \bar{F}_y) \frac{\cos \alpha}{\bar{w}}, \quad (25)$$

$$\tau = 0: \quad \bar{w} = \bar{w}_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad (26)$$

$$\text{где } \bar{w} = \frac{wL}{v}, \quad \bar{k} = kL, \quad \bar{P}_x = \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{P}_y = \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}},$$

$$\bar{E}_x = \bar{w} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \cos \alpha + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \sin \alpha \right), \quad \bar{E}_y = \bar{w} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} \cos \alpha + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} \sin \alpha \right),$$

$$\bar{F}_x = Ga \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \sin \varphi, \quad \bar{F}_y = -Ga \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \cos \varphi, \quad Ga = gL^3 / v^2.$$

Для численного решения сформулированной задачи в расчетной области вводились равномерные разностные сетки узлов по пространству и времени, а уравнения для несущей фазы (17)–(19) с краевыми условиями (20)–(23) заменялись неявными конечно-разностными схемами.

Для нелинейных конвективных членов в уравнении вихря (17) использовалась монотонная аппроксимация Самарского. Задание граничного условия для вихря выполнялось по методу, предложенному в [7].

Полученные системы трехдиагональных разностных уравнений для вихря, функции тока и температуры решались итерационным методом переменных направлений с использованием метода прогонки [8, 9].

Для расчета и построения траектории движения частицы дифференциальные уравнения (14) и (15) в конечно-разностном виде могут быть представлены следующими соотношениями

$$\bar{x}(\tau + \Delta\tau) = \bar{x}(\tau) + (\bar{U} + \bar{w} \cos \alpha) \Delta\tau, \quad (27)$$

$$\bar{y}(\tau + \Delta\tau) = \bar{y}(\tau) + (\bar{V} + \bar{w} \sin \alpha) \Delta\tau. \quad (28)$$

Алгоритм решения сформулированной задачи следующий.

Сначала решается система уравнений (17)–(19) с краевыми условиями (20)–(23) для несущей среды и определяются в узлах эйлеровой сетки распределения компонентов скорости. Поскольку координаты дисперсной частицы не совпадают с узлами эйлеровой разностной сетки для несущей среды, то перед решением методом Ньютона системы уравнений (24)–(25) и последующего определения новых координат частицы по (27) и (28), входящие в их правые части параметры несущей среды определялись с помощью линейного интерполяционного полинома по их значениям в четырех ближайших к частице узлах эйлеровой сетки.

Для решения сформулированной выше задачи на алгоритмическом языке Фортран-90 в среде Compaq Visual Fortran разработана оригинальная программа для ЭВМ, позволяющая визуализировать на экране цветного дисплея результаты моделирования в виде изолиний вихря, функции тока, температуры, компонентов вектора скорости и скорости несущей среды, векторного поля скорости несущей среды и траекторий движущихся частиц.

Блоки программы, предназначенные для расчета параметров несущей среды, протестированы на задачах, рассмотренных в [9,10] путем сравнения результатов при различных значениях критериев Gr и Pr. Стационарные распределения векторов скорости, изолиний функции тока и температуры для несущей среды при Gr=10⁶ и Pr=0.71 приведены на рис. 2. Расчеты выполнялись на разностной сетке по пространству 65×65 и с шагом по времени 0.0002. Получена хорошая сходимость результатов расчетов по величинам максимальных значений функции тока, скоростей, средних, максимальных и минимальных значений чисел Нуссельта.

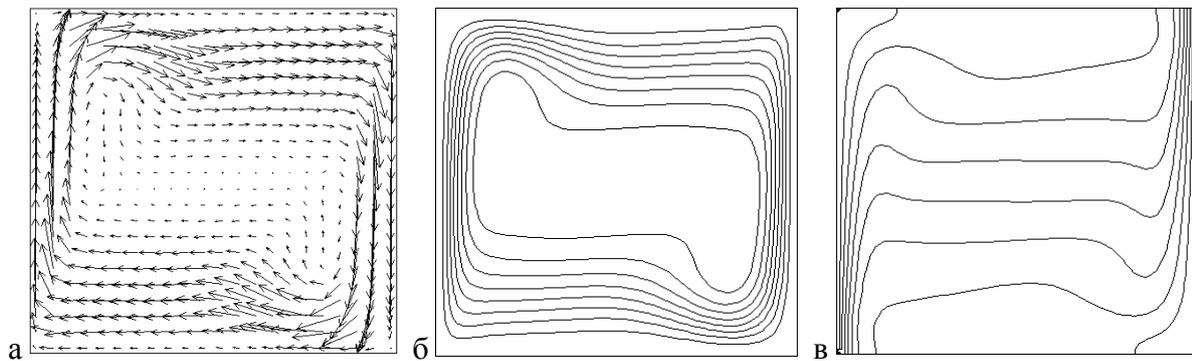


Рис.2. Стационарные распределения векторов скорости (а), изолиний функции тока (б) и температуры (в) при Gr=10⁶ и Pr=0.71

Результаты расчетов

Влияние периодически изменяющейся температуры греющей стенки на параметры движения вязкой несжимаемой несущей среды при свободной термогравитационной конвекции в квадратной полости показано на рис. 3. Приведены расчетные распределения в несущей среде при установившемся периодическом движении поля вектора скорости \mathbf{V}_1 , изолинии функции тока ψ и изолинии температуры θ для значений критериев Gr=10⁶ и Pr=0.71, полученные при A=0.3 и $\bar{\Omega} = 1000$ на четыре характерных

момента времени: а - начало периода при $\sin \overline{\Omega} \tau = 0$; б - четверть периода при $\sin \overline{\Omega} \tau = 1$; в - полупериод при $\sin \overline{\Omega} \tau = 0$; г - три четверти периода при $\sin \overline{\Omega} \tau = -1$.

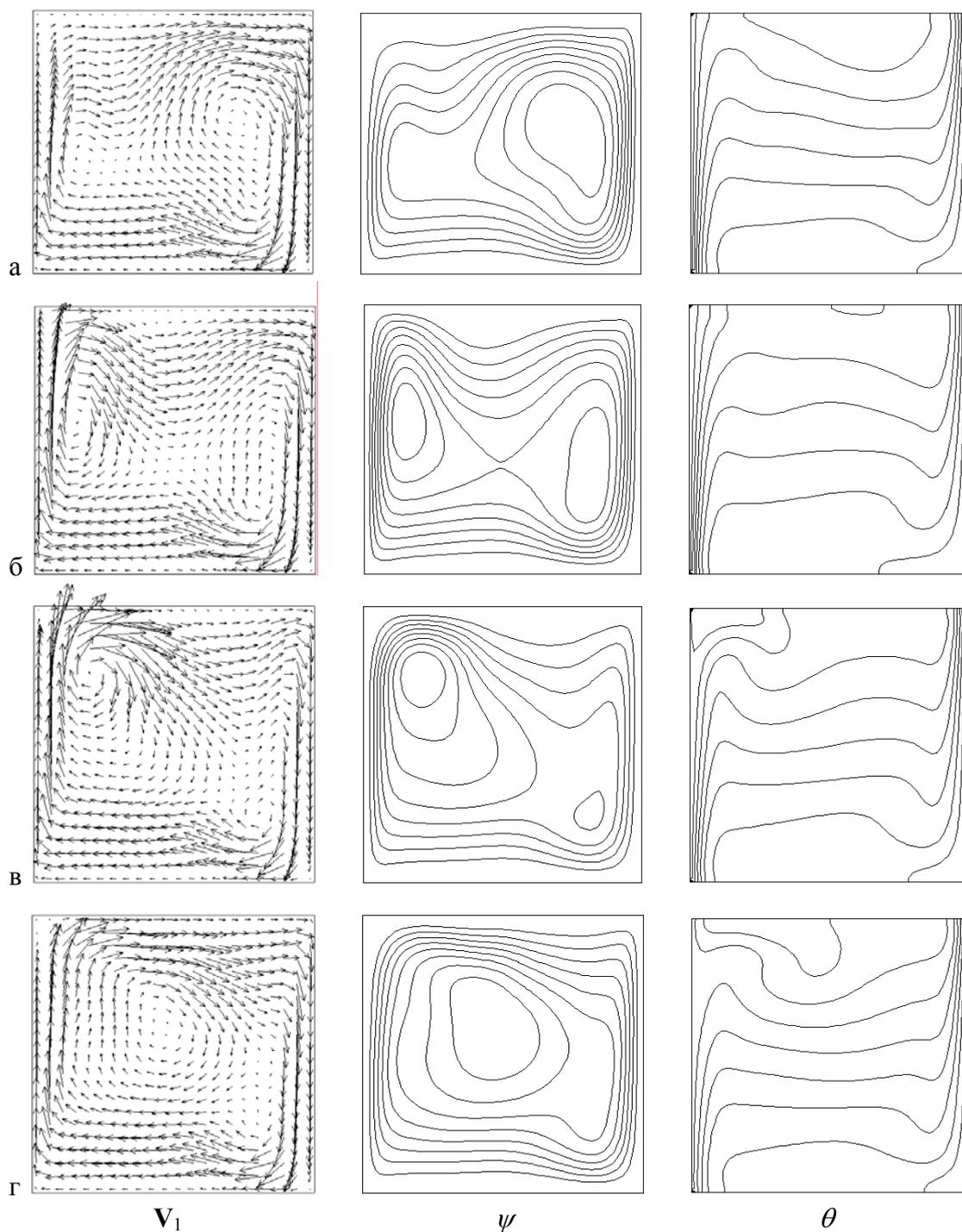


Рис. 3. Распределения параметров несущей среды (поля вектора скорости V_1 , изолинии функции тока ψ и температуры θ) при $A=0.3$ и $\overline{\Omega} = 1000$ на различные характерные моменты времени при установившемся периодическом движении: а - начало периода при $\sin \overline{\Omega} \tau = 0$; б - четверть периода при $\sin \overline{\Omega} \tau = 1$; в - полупериод при $\sin \overline{\Omega} \tau = 0$;

τ - три четверти периода при $\sin \bar{\Omega} \tau = -1$

Математическое моделирование показало, что периодическое изменение температуры греющей стенки оказывает большое влияние на характер движения и распределение температуры в расчетной области при свободной термогравитационной конвекции несущей среды в замкнутой прямоугольной области. Как видно из рис. 3, наибольшее влияние периодическое изменение температуры греющей стенки проявляется в верхней левой и центральной части полости. Периодическое изменение температуры нагретой стенки приводит к нестационарному прогреву пристенного слоя несущей среды и периодическому выбросу в направлении верхней стенки с повышенной скоростью более прогретой жидкости. Вследствие этого циркуляция несущей среды становится нестационарной. В центральной части полости возникают переменные по времени градиенты температуры в направлении горизонтальной оси x . Распределение скорости движения несущей среды в центральной части полости становится нестационарным и, вследствие периодического образования (см. рис. 3,б) и исчезновения (см. рис. 3,в) вторичных течений, приобретает более сложный характер.

Существенное усложнение гидродинамики при периодическом тепловом воздействии на свободную конвекцию несущей среды оказывает влияние на динамику движения дисперсных частиц. Ниже представлены некоторые результаты численного моделирования движения монодисперсных сферических частиц с относительными диаметром $d/L=0.00028$ и плотностью $\rho_1 / \rho_2 = 0.005$ с начальными координатами движения $x_0=0.1$ и $y_0=0.9$ в неоднородной несущей среде при значениях критериев Галилея $Ga=29.3 \cdot 10^6$, Грасгофа $Gr=10^6$ и Прандтля $Pr=0.71$ в условиях периодического изменения температуры нагретой стенки.

На рис. 4 и 5 приведены расчетные траектории движения пробной частицы при различных значениях амплитуды A и частоты $\bar{\Omega}$, входящих в периодический закон изменения температуры нагретой стенки при $x=0$.

На рис. 4,а приведена траектория движения пробной частицы при отсутствии колебаний температуры нагретой стенки ($A=0$). В этих условиях данная частица захватывается потоком несущей среды и витает вместе с ней неограниченно долго. На рис. 4,б показана траектория движения частицы при $\bar{\Omega}=100$ и $A=0.1$. Из рисунка видно, что при этих значениях параметров периодического закона изменения температуры стенки, она начинает оказывать влияние на характеристики движения несущей среды, как непосредственно у нагретой стенки, так и на удалении от нее, а через них и на траекторию движения частицы, но еще не приводит к ее осаждению. Дальнейшее увеличение амплитуды колебаний температуры нагретой стенки до величины $A=0.3$ при частоте $\bar{\Omega}=100$ приводит к осаждению частицы (см. рис. 4,в).

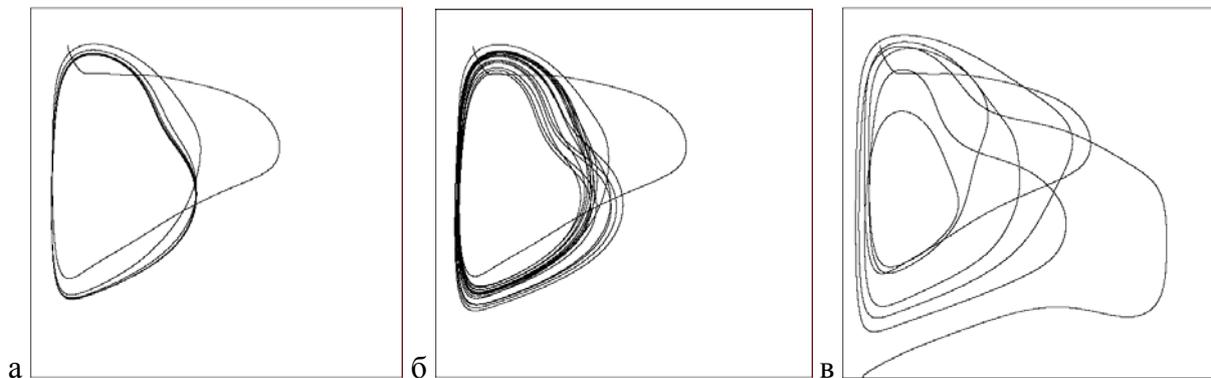


Рис. 4. Траектории движения пробной частицы при $\bar{\Omega} = 100$:

а - постоянная температура нагретой стенки ($A=0.0$); б - $A=0.1$; в - $A=0.3$

На рис. 5 приведены траектории движения пробной частицы при повышенной частоте колебания температуры нагретой стенки $\bar{\Omega} = 1000$. Из рис.5 видно, что при этой частоте пробная частица осаждаёт как при амплитуде колебаний температуры $A=0.1$, так и при $A=0.3$.

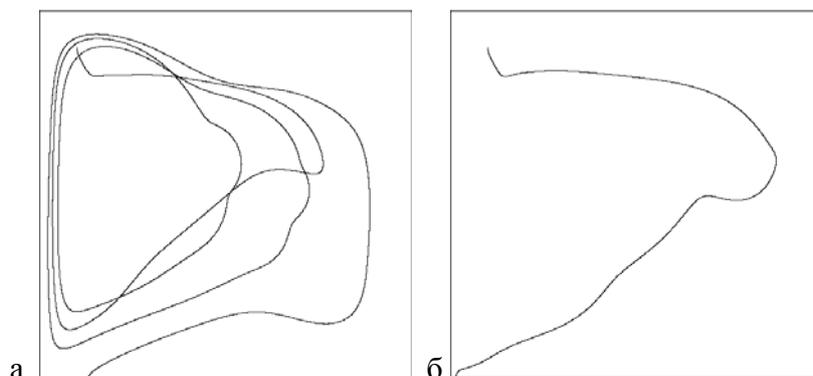


Рис. 5. Траектории движения пробной частицы при $\bar{\Omega} = 1000$: а - $A=0.1$; б - $A=0.3$

Рис. 6 даёт представление об изменении со временем относительных значений температуры нагретой стенки (1), максимальной скорости движения несущей среды (2), скорости движения дисперсной частицы (3) и температуры несущей среды в верхней (4) и нижней (5) части полости вблизи нагретой стенки при периодическом изменении ее температуры с параметрами $\bar{\Omega} = 100$ и $A=0.2$. В качестве масштабов отнесения приняты: для скоростей - максимальная скорость несущей среды; для температур - максимальная температура нагретой стенки.

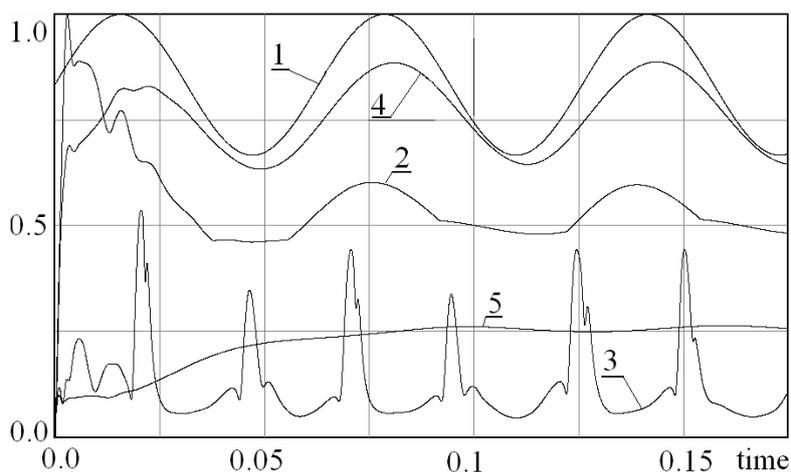


Рис. 6. Изменения во времени относительных величин некоторых параметров несущей среды и дисперсной частицы: 1 – температура нагретой стенки; 2 – максимальная скорость несущей среды; 3 – скорость движения дисперсной частицы;

4 и 5 – температура несущей среды в точках с координатами (x, y) , соответственно, $(0.0625, 0.9375)$ и $(0.0625, 0.0625)$

Выводы

Проведенные расчеты показали, что при свободной конвекции несущей среды периодическое изменение температуры нагретой стенки оказывает сложное воздействие, как на движение самой несущей среды, так и на движение частиц дисперсной фазы. Увеличение частоты колебания температуры стенки при постоянном значении амплитуды приближает процесс к условиям с постоянной по времени средней температуре стенки. Увеличение амплитуды колебаний при относительно низких частотах приводит к уменьшению времени витания дисперсных частиц и способствует их осаждению.

Л и т е р а т у р а

1. Райст П. Аэрозоли. М.: Мир, 1987. 280 с.
2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. Галицейский Б.М., Рыжов Ю.А., Якуш Е.В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977. 256 с.
4. Kholpanov L.P., Ismailov B.R., Vlasak P. Modelling of Multiphase Flow Containing Bubbles, Drops and solid Particles // Eng. Mech., 2005, Vol. 12, No. 6, P.1–11.
5. Холпанов Л.П., Ибяттов Р.И. Математическое моделирование динамики дисперсной фазы // ТОХТ. 2005. Т. 39, № 2. С. 206–215.
6. Некрасова Е.И., Некрасов А.К., Холпанов Л.П. Математическое моделирование динамики дисперсной фазы в квадратной полости при свободной конвекции // Тр. РНКТ-4. 2006 г. Т. 6. С. 91-94.
7. Полежаев В.И., Грязнов В.Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье – Стокса в переменных «вихрь, функция тока» // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 2. С. 301–304.
8. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
9. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.И. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987. 272 с.
10. Vahl Davis G. De. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 1983. Vol. 3, №3. P. 249-264.