УДК 629.7

ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУР В ПЕРЕКРЁСТНО–ТОЧНОМ РЕКУПЕРАТОРЕ ПРИ ЧИСТО ПЕРЕКРЁСТНОМ ТОКЕ

И. Е. Лобанов

Московский Авиационный институт, г. Москва, Россия

Впервые теория расчёта распределения температур при чисто перекрёстном токе была разработано в работах В.Нуссельта [8, 9], продолжена в работах [1—7].

Согласно вышеупомянутой теории, более тёплый теплоноситель движется в пространстве между вертикальными трубами перекрёстно-точного рекуператора слева направо, в то время как холодный теплоноситель движется по трубам снизу вверх.

Принимается в качестве упрощения, что все трубы разрезаны в продольном направлении и развёрнуты в плоскую пластину, площадь которой F равна суммарной поверхности нагрева всех труб.

Следовательно, определённая точка пластины характеризуется координатами x и x', а длины сторон пластины равны соответственно L и L'.

Температуры теплоносителей в точке с координатами xx' обозначим ϑ и ϑ' соответственно.

Дифференциальные уравнения, детерминирующие распределение температур в перекрёстно-точном регенераторе при чисто перекрёстном токе, согласно [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = \vartheta' - \vartheta; \\ \dfrac{\partial\vartheta'}{\partial\xi'} = \vartheta - \vartheta', \end{cases} \tag{1}$$

где $\xi = \dfrac{kL'}{C}x$; $\xi' = \dfrac{kL}{C'}x'$ — безразмерные переменные; C и C' — теплоёмкости массовых расходов теплоносителей; k — коэффициент теплопередачи.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1) формально совпадает с рассматриваемой системой уравнений для распределения температур в регенераторах при соответственно изменённом смысле переменных, если:

а) вместо температуры насадки Θ используется температура ϑ';

б) вместо введённого приведённого времени η используется безразмерная переменная ξ'.

Следовательно, в этом случае будет справедливо точное аналитическое решение для первоначального разогрева насадки регенератора, полученное в [10—13], естественно, при соответственном вышеуказанном изменении смысла переменных:

$$\vartheta = \vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)e^{-\xi'}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi'^m}{(m!)^2}\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}; \tag{2}$$

$$\vartheta' = \vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi^m}{(m!)^2} \frac{\xi'^{n+1}}{(n+1)}; \tag{3}$$

$$\vartheta' = \vartheta_1 - e^{-\xi'} \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi'^{m+1}}{m!(m+1)!} \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}\right). \tag{4}$$

Полученные точные аналитические решения задачи о распределении температур в перекрёстно-точном регенераторе при чисто перекрёстном токе (2)—(4) обладают перед существующими приближёнными решениями всеми теми же преимуществами, свойственными решениям [10—13]

В работе [9], а также в [1], приводится решение вышеуказанной задачи, полученное на основании решения интегральных уравнений:

$$\frac{\vartheta - \vartheta'_1}{\vartheta_1 - \vartheta'_1} = 1 - e^{-(\xi + \xi')} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}; \tag{5}$$

$$\frac{\vartheta' - \vartheta'_1}{\vartheta_1 - \vartheta'_1} = 1 - e^{-(\xi + \xi')} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}. \tag{6}$$

Вышеприведённые решения (5)—(6) эквивалентны полученным решениям (2)—(4). Чтобы убедиться в эквивалентности выражений (5) с (2), необходимо отнять от левой и правой частей выражения (5) единицу, тогда выражение в левой части (5) будет равным $\frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_1 - \vartheta'_1}$, т.е. таким же, что и в выражении (2) (эквивалентность выражений (2) и (3) доказана в п.1 данной работы).

В рамках данного исследования были проведены также численные расчёты по формулам (5) и (6) для широкого диапазона определяющих параметров ξ и ξ', которые полностью совпали с расчётами по точным решениям (2)—(4), при условии равности погрешности вычислений.

Сопоставление точных решений (5)—(6) с решениями в квадратурах позволяет получить новые выражения для интегралов:

$$\int_0^{\xi} e^{-(\xi+\xi')} J_0\left[2i\sqrt{\xi\xi'}\right] d\xi = e^{-(\xi + \xi')} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}; \tag{7}$$

$$\int_0^{\xi'} e^{-(\xi+\xi')} J_0\left[2i\sqrt{\xi\xi'}\right] d\eta = 1 - e^{-(\xi + \xi')} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}. \tag{8}$$

Последнее выражение можно преобразовать с целью получения наиболее компактного выражения и получения того же вида, что и в выражении (7) путём изменения порядка суммирования переменных:

$$1-e^{-(\xi+\xi')}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\xi^n}{n!}\frac{\xi'^m}{m!}=e^{-(\xi+\xi')}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\xi'^n}{n!}\frac{\xi^m}{m!}. \tag{9}$$

Численные расчёты, проведённые в рамках данной работы для широкого диапазона определяющих параметров ξ и ξ', полностью подтверждают приведённые преобразования.

Следовательно, самой компактной записью точных аналитических решений исходной системы уравнений в частных производных для задачи о распределении температур в перекрёстно-точном регенераторе при чисто перекрёстном токе следует признать следующую:

$$\vartheta=\vartheta_1-\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)e^{-(\xi+\xi')}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\xi^n}{n!}\frac{\xi'^m}{m!}; \tag{10}$$

$$\vartheta'=\vartheta'_1+\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)e^{-(\xi+\xi')}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\xi'^n}{n!}\frac{\xi^m}{m!}. \tag{11}$$

Другой формой записи выражений (10)—(11) может быть предложена запись, в которой нет двойных рядов, но в которой имеют место специальные функции:

$$\vartheta=\vartheta_1-\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)e^{-\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n,\xi')}{(n-1)!^2}\frac{\xi^n}{n}; \tag{12}$$

$$\vartheta'=\vartheta'_1+\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)e^{-\xi'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n,\xi)}{(n-1)!^2}\frac{\xi'^n}{n}, \tag{13}$$

где $\Gamma(a,y)=\int_y^{+\infty}e^{-t}t^{a-1}dt$ — неполная гамма-функция.

Эквивалентность полученных новых выражений с выведенными ранее и независимое согласование их посредством численных расчётов, проведённых в рамках данной работы, служит дополнительной верификацией их истинности.

Полученные выше точные аналитические решения для ϑ и ϑ' позволяют детерминировать значения ϑ_2 и ϑ'_2 согласно уравнениям [1]:

$$\vartheta_2=\frac{C'}{kF}\int_0^{\frac{kF}{C'}}\vartheta\Big|_{\xi=\frac{kF}{C}}d\xi'; \tag{14}$$

$$\vartheta'_2=\frac{C}{kF}\int_0^{\frac{kF}{C}}\vartheta'\Big|_{\xi'=\frac{kF}{C'}}d\xi. \tag{15}$$

Для расчёта ϑ_2 и ϑ'_2 следует воспользоваться решениями для ϑ и ϑ', полученными в рамках данной работы (2)—(3) или (10)—(11). Для точных решений в форме (2)—(3) получим:

$$\vartheta_2 = \frac{C'}{kF}\int_0^{\frac{kF}{C'}}\left(\vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-\xi'}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\frac{\xi'^{n+1}}{(n+1)}\right)d\xi' =$$

$$= \frac{C'}{kF}\int_0^{\frac{kF}{C'}}\left(\vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\xi'^p}{p!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi'^m}{(m!)^2}\frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{n+1}}{(n+1)}\right)d\xi' =$$

$$= \frac{C'}{kF}\int_0^{\frac{kF}{C'}}\left(\vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!}\frac{\xi'^{m+p}}{(m!)^2 p!}\frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{n+1}}{(n+1)}\right)d\xi' = \tag{16}$$

$$= \vartheta_1 - \frac{\left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)}{\left(\frac{kF}{C'}\right)}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!}\frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{m+p+1}}{(m!)^2 p!(m+p+1)}\frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{n+1}}{(n+1)};$$

$$\vartheta'_2 = \frac{C}{kF}\int_0^{\frac{kF}{C}}\left(\vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n+1}}{(n+1)}\right)d\xi =$$

$$= \frac{C}{kF}\int_0^{\frac{kF}{C}}\left(\vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\xi^p}{p!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n+1}}{(n+1)}\right)d\xi =$$

$$= \frac{C}{kF}\int_0^{\frac{kF}{C}}\left(\vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!}\frac{\xi^{m+p}}{(m!)^2 p!}\frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n+1}}{(n+1)}\right)d\xi = \tag{17}$$

$$= \vartheta'_1 + \frac{\left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)}{\left(\frac{kF}{C}\right)}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!}\frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{m+p+1}}{(m!)^2 p!(m+p+1)}\frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n+1}}{(n+1)}.$$

Аналогичный подход к решениям (10)—(11) даёт следующие точные решения, тождественные (16)—(17):

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - \frac{\left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)}{\left(\frac{kF}{C'}\right)} e^{-\frac{kF}{C}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^p \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{m+p+1}\left(\frac{kF}{C}\right)^n}{n!\,p!\,m!\left(m+p+1\right)}; \tag{18}$$

$$\vartheta'_2 = \vartheta_1 + \frac{\left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)}{\left(\frac{kF}{C}\right)} e^{-\frac{kF}{C'}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^p \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n}\left(\frac{kF}{C}\right)^{p+m+1}}{n!\,p!\,m!\left(m+p+1\right)}. \tag{19}$$

Средняя разность температур между теплоносителями при чисто перекрёстном токе $\Delta\vartheta_M = (\vartheta - \vartheta')_M$ будет равно, согласно [1]:

$$\Delta\vartheta_M = \frac{1}{\left(\frac{kF}{C}\right)}\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right). \tag{20}$$

Следовательно, точное аналитическое выражение для $\Delta\vartheta_M$ примет вид при использовании решения вида (16):

$$\Delta\vartheta_M = \frac{\left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)}{\left(\frac{kF}{C}\right)\left(\frac{kF}{C'}\right)} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{m+p+1}}{\left(m!\right)^2 p!\left(m+p+1\right)} \frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)}, \tag{21}$$

а при использовании решения вида (18) —

$$\Delta\vartheta_M = \frac{\left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)}{\left(\frac{kF}{C}\right)\left(\frac{kF}{C'}\right)} e^{-\frac{kF}{C}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^p \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{m+p+1}\left(\frac{kF}{C}\right)^n}{n!\,p!\,m!\left(m+p+1\right)}. \tag{22}$$

Точные аналитические решения (21) или (22) позволяют напрямую детерминировать среднюю разность температур между теплоносителями при чисто перекрёстном токе $\Delta\vartheta_M$, если известны значения ϑ_1 и ϑ'_1 , а также $\left(\frac{kF}{C}\right)$, $\left(\frac{kF}{C'}\right)$.

Для случая детерминирования $\Delta\vartheta_M$ по температурам на входе и выходе — ϑ_1 и ϑ_2 — следует воспользоваться тем, что количество теплоты, передаваемое в единицу времени во всём теплообменнике равно [1]:

$$\dot{Q} = C(\vartheta_1 - \vartheta_2) = C'(\vartheta'_2 - \vartheta'_1) = kF\Delta\vartheta_M . \tag{23}$$

Следовательно, значения $\left(\frac{kF}{C}\right)$ и $\left(\frac{kF}{C'}\right)$ можно выразить через ϑ_1, ϑ_2, $\Delta\vartheta_M$:

$$\left(\frac{kF}{C}\right) = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}; \tag{24}$$

$$\left(\frac{kF}{C'}\right) = \frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}. \tag{25}$$

Трансцендентное уравнение для детерминирования $\Delta\vartheta_M$ по температурам ϑ_1 и ϑ_2 (а также по температурам ϑ'_1 и ϑ'_2) будут выглядеть следующим образом при использовании точного аналитического решения вида (21):

$$\Delta\vartheta_M = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}\right]\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+1}}{(m!)^2 p!(m+p+1)} \frac{\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{n+1}}{(n+1)}, \tag{26}$$

после сокращений получим:

$$1 = (\vartheta_1 - \vartheta'_1) \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{[(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)]^{m+p}[(\vartheta_1 - \vartheta_2)]^{n}}{(m!)^2 p!(m+p+1)(n+1)} \left[\frac{1}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+n+1}; \tag{27}$$

а при использовании точного аналитического решения вида (21) —

$$\Delta\vartheta_M = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}\right]\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]} e^{-\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+1}\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{n}}{n!\,p!\,m!(m+p+1)}. \tag{28}$$

что после аналогичных сокращений примет вид:

$$1 = (\vartheta_1 - \vartheta'_1) e^{-\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (-1)^p \frac{[(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)]^{m+p}[(\vartheta_1 - \vartheta_2)]^{n-1}}{n!\,p!\,m!(m+p+1)} \left[\frac{1}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+n}. \tag{29}$$

В некоторых работах, список которых приведён в [1], а также в самой монографии [1], предлагается решать вышеуказанное уравнение в относительных величинах, что удобно для наглядного представления результатов в виде диаграмм (номограмм). Для этого случая уравнения (26)—(27) примут вид:

$$1 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!}\frac{\left[\frac{\left(\vartheta'_2-\vartheta'_1\right)}{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}\right]^{m+p}}{(m!)^2\,p!\left(m+p+1\right)}\frac{\left[\frac{\left(\vartheta_1-\vartheta_2\right)}{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}\right]^{n}\left[\frac{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+n+1}}{\left(n+1\right)}, \qquad (30)$$

а при использовании точного аналитического решения вида (21) —

$$1 = e^{-\left[\frac{(\vartheta_1-\vartheta_2)}{(\vartheta_1-\vartheta'_1)}\right]\left[\frac{(\vartheta_1-\vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^p\,\frac{\left[\frac{\left(\vartheta'_2-\vartheta'_1\right)}{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}\right]^{m+p}\left[\frac{\left(\vartheta_1-\vartheta_2\right)}{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}\right]^{n-1}\left[\frac{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+n}}{n!\,p!\,m!\left(m+p+1\right)}. \qquad (31)$$

Численный расчёт $\Delta\vartheta_M$ по относительным величинам $\frac{\left(\vartheta_1-\vartheta_2\right)}{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}$ и $\frac{\left(\vartheta'_2-\vartheta'_1\right)}{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}$, проведённый по формулам (30)—(31), показывает, что он очень хорошо коррелирует с данными работ, приведённых в [1], но имеет перед последними неоспоримое преимущество по точности. Здесь следует напомнить, что расчёт $\Delta\vartheta_M$ без использования вышеуказанных относительных величин — $\frac{\Delta\vartheta_M}{\left(\vartheta_1-\vartheta_2\right)}$; $\frac{\left(\vartheta_1-\vartheta_2\right)}{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}$; $\frac{\left(\vartheta'_2-\vartheta'_1\right)}{\left(\vartheta_1-\vartheta'_1\right)}$ — по формулам (27) и (29) будет точнее, чем при их использовании. Использование вышеупомянутых относительных величин, однако, обладают наглядностью получаемых решений, поскольку снижают количество определяющих параметров с четырёх до двух, для которых можно построить соответствующие диаграммы (номограммы).

Выводы

Точные аналитические решения задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой, имеющей как одинаковую, так и произвольно заданную, начальную температуру (задача Анцелиуса—Нуссельта), которые при соответствующем изменении смысла переменных детерминируют распределение температур в чисто перекрёстно-точном регенераторе, т.е. представляют собой точное аналитическое решение задачи о полном распределении температур в перекрёстно-точном рекуператоре при чисто перекрёстном токе, в том числе позволяют напрямую детерминировать среднюю разность температур между теплоносителями. Для этого случая была также получена новая, наиболее компактная, форма точных аналитических решений.

Вышеприведённые точные аналитические решения имеют неоспоримое преимущество перед существующими численными, поскольку выявляют имманентную связь между определяющими и определяемыми параметрами; ими можно непосредственно воспользоваться при расчёте, не прибегая к помощи диаграмм (номограмм) или вычислительной техники.

Список литературы

1. Хаузен Х. Теплопередача при противотоке, прямотоке и перекрёстном токе. М.: Энергоиздат, 1981. 384 с.

2. Anzelius A. Über Erwärmung vermittels durchströmender Medien. Z. angew. Math. Mech. 1926. Bd. 6. S. 291.

3. Nußelt W. Die Theorie des Winderhitzers. Z. VDI. 1927. Bd. 71. S. 85.

4. Нестационарный теплообмен / Кошкин В.К., Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А.

М.: Машиностроение, 1973. 328 с.
5. Kalinin E.K., Dreitser G.A. Unsteady Convective Heat Transfer in Channels / Advances in heat transfer. Volume 25. New York: Academic Press, 1994. P. 1—150.
6. Галицейский Б.М., Дрейцер Г.А. Нестационарное поле температур стенки трубы и теплоносителя при малых значениях критерия Bi. Известия вузов. Авиационная техника. 1970. № 2. С. 90—98.
7. Schumann T.E.W. Heat Transfer: A Liquid Flowing through a Porous Prism. J. Franklin Inst. 1929. V. 208. P. 405.
8. Nußelt W. Der Wärmeübergang im Kreuzstrom. Z. VDI. 1911. Bd. 55. S. 2021—2024.
9. Nußelt W. Ein neue Formel für den Wärmeübergang Kreuzstrom. Techn. Mech. u. Therm. 1930. Bd. 1. S. 417—422.
10. Лобанов И.Е. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Труды Четвёртой Российской национальной конференции по теплообмену. В 8 томах. Т. 2. Вынужденная конвекция однофазной жидкости. М.: МЭИ, 2006. С. 187—190.
11. Лобанов И.Е. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Тезисы докладов и сообщений VI Минского международного форума по тепломассообмену. Минск, 2008. Т. 1. С. 122—124.
12. Лобанов И.Е. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Тезисы докладов и сообщений VI Минского международного форума по тепломассообмену. Минск, 2008. Секция № 1. Конвективный тепломассообмен. Доклад № 1/40. С. 1—8.
13. Лобанов И.Е. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Известия вузов. Авиационная техника. 2008. № 2. С. 37—40.